College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

高等数学

习题全解指南

下册　同济·第六版

同济大学数学系　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学数学学习辅导丛书

高等数学习题全解指南

同济·第六版（下册）

同济大学数学系　编

高等教育出版社

内容提要

本书是与同济大学数学系编《高等数学》第六版相配套的学习辅导书，由同济大学数学系的教师编写。本书内容由三部分组成，第一部分是按《高等数学》（下册）的章节顺序编排，给出习题全解。部分题目在解答之后对该类题的解法作了小结、归纳，有的提供了多种解法；第二部分是全国硕士研究生入学统一考试数学试题选解，所选择的试题以工学类为主，少量涉及经济学类试题；第三部分是同济大学高等数学考卷选编以及考题的参考解答。

本书对教材具有相对的独立性，可为工科和其他非数学类专业学生学习以及准备报考硕士研究生的人员复习高等数学提供解题指导，也可供讲授高等数学的教师在备课和批改作业时参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题全解指南：同济．第6版．下册/同济大学数学系编．—北京：高等教育出版社，2007.5
ISBN 978-7-04-020746-0

Ⅰ．高… Ⅱ．同… Ⅲ．高等数学－高等学校－解题
Ⅳ．O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第049008号

策划编辑 王　强　　责任编辑 崔梅萍　　封面设计 王凌波　　责任绘图 杜晓丹
版式设计 张　岚　　责任校对 金　辉　　责任印制 韩　刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京汇林印务有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2007年5月 第1版
印　　张	20.25	印　　次	2007年11月 第3次印刷
字　　数	380 000	定　　价	21.40元

物料号　20746-00

目录

一、《高等数学》(第六版)下册习题全解

二、全国硕士研究生入学统一考试数学试题选解

三、同济大学高等数学试卷选编

一、

《高等数学》（第六版）下册习题全解

第八章　空间解析几何与向量代数

习题8－1　向量及其线性运算

1. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. 试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

解　$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$

$=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$.

2. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形.

证　如图 8－1，设四边形 $ABCD$ 中 AC 与 BD 交于点 M，已知 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MB}$. 故

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DC}$.

即　$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{DC}$ 且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，因此四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

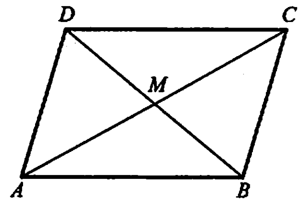


图 8－1

3. 把$\triangle ABC$ 的 BC 边五等分，设分点依次为 D_1、D_2、D_3、D_4，再把各分点与点 A 连接. 试以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$、$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$、$\overrightarrow{D_2A}$、$\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

证　如图 8－2，根据题意知

$\overrightarrow{BD_1}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{D_1D_2}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{D_2D_3}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{D_3D_4}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a}$，

故

$\overrightarrow{D_1A}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_1})=-\frac{1}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$.

$\overrightarrow{D_2A}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_2})=-\frac{2}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$.

$\overrightarrow{D_3A}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_3})=-\frac{3}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$.

$\overrightarrow{D_4A}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD_4})=-\frac{4}{5}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$.

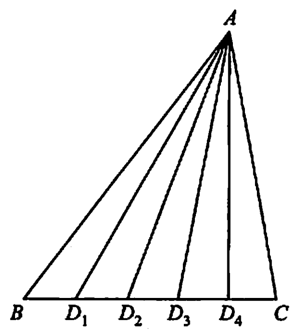


图 8－2

4. 已知两点 $M_1(0,1,2)$ 和 $M_2(1,-1,0)$. 试用坐标表示式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

解　$\overrightarrow{M_1M_2}=(1-0,-1-1,0-2)=(1,-2,-2)$.

$-2\overrightarrow{M_1M_2}=-2(1,-2,-2)=(-2,4,4)$.

5. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量.

解 向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，故平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为

$$\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\frac{1}{11}(6,7,-6)=\pm\left(\frac{6}{11},\frac{7}{11},\frac{-6}{11}\right),$$

其中 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11$.

6. 在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限？

$A(1,-2,3)$；$B(2,3,-4)$；$C(2,-3,-4)$；$D(-2,-3,1)$.

解 A 点在第四卦限，B 点在第五卦限，C 点在第八卦限，D 点在第三卦限.

7. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征？指出下列各点的位置：

$A(3,4,0)$；$B(0,4,3)$；$C(3,0,0)$；$D(0,-1,0)$.

解 在坐标面上的点的坐标，其特征是表示坐标的三个有序数中至少有一个为零. 比如 xOy 面上的点的坐标为 $(x_0,y_0,0)$，xOz 面上的点的坐标为 $(x_0,0,z_0)$，yOz 面上的点的坐标为 $(0,y_0,z_0)$.

在坐标轴上的点的坐标，其特征是表示坐标的三个有序数中至少有两个为零，比如 Ox 轴上的点的坐标为 $(x_0,0,0)$，Oy 轴上的点的坐标为 $(0,y_0,0)$，Oz 轴上点的坐标为 $(0,0,z_0)$.

A 点在 xOy 面上，B 点在 yOz 面上，C 点在 x 轴上，D 点在 y 轴上.

8. 求点 (a,b,c) 关于(1)各坐标面；(2)各坐标轴；(3)坐标原点的对称点的坐标.

解 (1)点 (a,b,c) 关于 xOy 面的对称点为 $(a,b,-c)$；关于 yOz 面的对称点是 $(-a,b,c)$；关于 zOx 面的对称点为 $(a,-b,c)$.

(2)点 (a,b,c) 关于 x 轴的对称点是 $(a,-b,-c)$；关于 y 轴的对称点是 $(-a,b,-c)$；关于 z 轴的对称点是 $(-a,-b,c)$.

(3)点 (a,b,c) 关于坐标原点的对称点是 $(-a,-b,-c)$.

9. 自点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线，写出各垂足的坐标.

解 设空间直角坐标系如图 8－3，根据题意，P_0F 为点 P_0 关于 xOz 面的垂线，垂足点 F 坐标为 $(x_0,0,z_0)$；P_0D 为点 P_0 关于 xOy 面的垂线，垂足点 D 坐标为 $(x_0,y_0,0)$；P_0E 为点 P_0 关于 yOz 面的垂线，垂足点 E 坐标为 $(0,y_0,z_0)$.

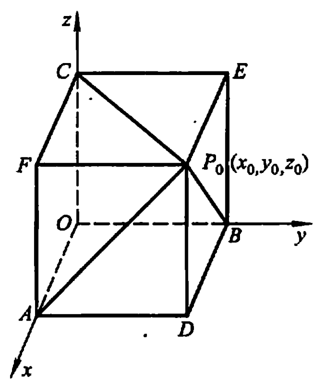


图 8－3

P_0A 为点 P_0 关于 x 轴的垂线，垂足点 A 的坐标为 $(x_0,0,0)$；P_0B 为点 P_0 关于 y 轴的垂线，垂足点 B 的坐标为 $(0,y_0,0)$；P_0C 为点 P_0 关于 z 轴的垂线，垂足点 C 的坐标为 $(0,0,z_0)$.

10. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直

线和平行于 xOy 面的平面，问在它们上面的点的坐标各有什么特点？

解 如图 8-4，过 P_0 且平行于 z 轴的直线 l 上的点的坐标，其特点是：它们的横坐标与纵坐标均相同.

而过点 P_0 且平行于 xOy 面的平面 π 上的点的坐标，其特点是，它们的竖坐标 z_0 均相同.

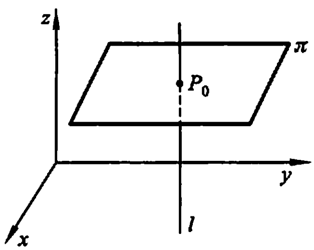


图 8-4

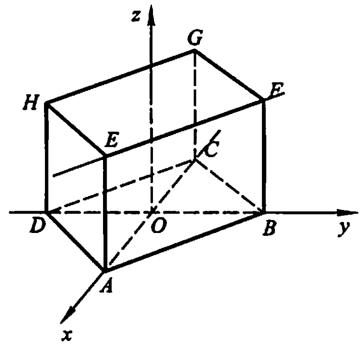


图 8-5

11. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上，其底面的中心在坐标原点，底面的顶点在 x 轴和 y 轴上，求它各顶点的坐标.

解 如图 8-5，已知 $AB=a$，故 $OA=OB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，于是各顶点的坐标分别为

$A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$，$B\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，$C\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$，$D\left(0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，$E\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right)$，$F\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,a\right)$，$G\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,a\right)$，$H\left(0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,a\right)$.

12. 求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离.

解 点 M 到 x 轴的距离 $d_1=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$，点 M 到 y 轴的距离 $d_2=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$，点 M 到 z 轴的距离 $d_3=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$.

13. 在 yOz 面上，求与三点 $A(3,1,2)$、$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

解 所求点在 yOz 面上，不妨设为 $P(0,y,z)$，点 P 与三点 A,B,C 等距离，$|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{3^2+(y-1)^2+(z-2)^2}$，$|\overrightarrow{PB}|=\sqrt{4^2+(y+2)^2+(z+2)^2}$，$|\overrightarrow{PC}|=\sqrt{(y-5)^2+(z-1)^2}$.

由 $|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|$ 知，

$$\sqrt{3^2+(y-1)^2+(z-2)^2}=\sqrt{4^2+(y+2)^2+(z+2)^2}=\sqrt{(y-5)^2+(z-1)^2},$$

即

$$\begin{cases}9+(y-1)^2+(z-2)^2=16+(y+2)^2+(z+2)^2,\\9+(y-1)^2+(z-2)^2=(y-5)^2+(z-1)^2.\end{cases}$$

解上述方程组，得 $y=1, z=-2$. 故所求点坐标为 $(0,1,-2)$.

14. 试证明以三点 $A(4,1,9)$、$B(10,-1,6)$、$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证 由 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=7$,

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2}=7$,

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}$

知 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$ 及 $|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2$. 故 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

15. 设已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$. 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=(3-4,0-\sqrt{2},2-1)=(-1,-\sqrt{2},1)$,

其模 $|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$. 其方向余弦分别为

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=\frac{1}{2}.$$

方向角分别为 $\alpha=\frac{2}{3}\pi,\beta=\frac{3}{4}\pi,\gamma=\frac{\pi}{3}$.

16. 设向量的方向余弦分别满足(1) $\cos\alpha=0$；(2) $\cos\beta=1$；(3) $\cos\alpha=\cos\beta=0$，问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何？

解 (1)由 $\cos\alpha=0$ 知 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，故向量与 x 轴垂直、平行于 yOz 面.

(2)由 $\cos\beta=1$ 知 $\beta=0$，故向量与 y 轴同向，垂直于 xOz 面.

(3)由 $\cos\alpha=\cos\beta=0$ 知 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$，故向量垂直于 x 轴和 y 轴，即与 z 轴平行. 垂直于 xOy 面.

17. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4，它与轴 u 的夹角是 $60°$，求 $\boldsymbol{r}$ 在轴 u 上的投影.

解 已知 $|\boldsymbol{r}|=4$, $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{r}|\cos\theta=4\cdot\cos 60°=4\times\frac{1}{2}=2$.

18. 一向量的终点在点 $B(2,-1,7)$，它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 4，-4 和 7. 求这向量的起点 A 的坐标.

解 设 A 点坐标为 (x,y,z)，则

$$\overrightarrow{AB}=(2-x,-1-y,7-z),$$

由题意知 $2-x=4, -1-y=-4, 7-z=7$,

故 $x=-2, y=3, z=0$，因此 A 点坐标为 $(-2,3,0)$.

19. 设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$. 求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}=4(3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})-(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})$

$=13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}$,

$\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的投影为 13，在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

习题8-2 数量积 向量积 *混合积

1. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；(2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}$；(3) $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦.

解 (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(3,-1,-2)\cdot(1,2,-1)$

$$=3\times1+(-1)\times2+(-2)\times(-1)=3,$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=(5,1,7).$$

(2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}=-6(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=-6\times3=-18$，

$\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=2(5,1,7)=(10,2,14)$.

(3) $$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{3}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{6}}=\frac{3}{2\sqrt{21}}.$$

2. 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为单位向量，且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解 已知 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，故 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0$.

即 $|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$.

因此 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2)=-\frac{3}{2}$.

3. 已知 $M_1(1,-1,2)$、$M_2(3,3,1)$ 和 $M_3(3,1,3)$. 求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(3-1,3-(-1),1-2)=(2,4,-1)$，

$\overrightarrow{M_2M_3}=(3-3,1-3,3-1)=(0,-2,2)$，

由于 $\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}$ 与 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直，故所求向量可取为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\pm(\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3})}{|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}|},$$

由
$$\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 4 & -1\\ 0 & -2 & 2\end{vmatrix}=(6,-4,-4),$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}|=\sqrt{6^2+(-4)^2+(-4)^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$$

知
$$\boldsymbol{a}=\frac{\pm1}{2\sqrt{17}}(6,-4,-4)=\pm\left(\frac{3}{\sqrt{17}},-\frac{2}{\sqrt{17}},-\frac{2}{\sqrt{17}}\right).$$

4. 设质量为 100 kg 的物体从点 $M_1(3,1,8)$ 沿直线移动到点 $M_2(1,4,2)$，计算重力所作的功(长度单位为 m，重力方向为 z 轴负方向).

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(1-3,4-1,2-8)=(-2,3,-6)$，

$\boldsymbol{F}=(0,0,-100\times 9.8)=(0,0,-980)$，

$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=(0,0,-980)\cdot(-2,3,-6)=5\,880(\mathrm{J})$.

5. 在杠杆上支点 O 的一侧与点 O 的距离为 x_1 的点 P_1 处，有一与 $\overrightarrow{OP_1}$ 成角 θ_1 的力 $\boldsymbol{F}_1$ 作用着；在 O 的另一侧与点 O 的距离为 x_2 的点 P_2 处，有一与 $\overrightarrow{OP_2}$ 成角 θ_2 的力 $\boldsymbol{F}_2$ 作用着(图 8-6). 问 θ_1、θ_2、x_1、x_2、$|\boldsymbol{F}_1|$、$|\boldsymbol{F}_2|$ 符合怎样的条件才能使杠杆保持平衡?

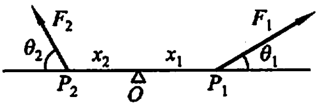


图 8-6

解 如图 8-6，已知有固定转轴的物体的平衡条件是力矩的代数和为零，又由对力矩正负符号的规定可得杠杆保持平衡的条件为

$$|\boldsymbol{F}_1|x_1\sin\theta_1-|\boldsymbol{F}_2|x_2\sin\theta_2=0,$$

即

$$|\boldsymbol{F}_1|x_1\sin\theta_1=|\boldsymbol{F}_2|x_2\sin\theta_2.$$

6. 求向量 $\boldsymbol{a}=(4,-3,4)$ 在向量 $\boldsymbol{b}=(2,2,1)$ 上的投影.

解 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{(4,-3,4)\cdot(2,2,1)}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\dfrac{6}{3}=2.$

7. 设 $\boldsymbol{a}=(3,5,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,4)$，问 λ 与 μ 有怎样的关系，能使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直?

解 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\lambda(3,5,-2)+\mu(2,1,4)=(3\lambda+2\mu,5\lambda+\mu,-2\lambda+4\mu)$.

要 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直，即要 $(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\perp(0,0,1)$，即

$$(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot(0,0,1)=0,$$

亦即

$$(3\lambda+2\mu,5\lambda+\mu,-2\lambda+4\mu)\cdot(0,0,1)=0,$$

故 $-2\lambda+4\mu=0$，因此当 $\lambda=2\mu$ 时能使 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直.

8. 试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

证明 如图 8-7，设 AB 是圆 O 的直径，C 点在圆周上，要证 $\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$. 只要证 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 即可.

由

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}&=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})\\&=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BO}+|\overrightarrow{OC}|^2\\&=-|\overrightarrow{AO}|^2+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OC}|^2=0,\end{aligned}$$

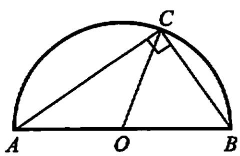


图 8-7

故 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$，$\angle ACB$ 为直角.

9. 已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$，计算：

(1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$；(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

解 (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(2,-3,1)\cdot(1,-1,3)=8$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=(2,-3,1)\cdot(1,-2,0)=8$，

故 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}=8(1,-2,0)-8(1,-1,3)=(0,-8,-24)$

$$=-8\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k}.$$

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,-3,1)+(1,-1,3)=(3,-4,4)$,

$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(1,-1,3)+(1,-2,0)=(2,-3,3)$,

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & -4 & 4\\ 2 & -3 & 3\end{vmatrix}=(0,-1,-1)=-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=2.$

10. 已知$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$,求$\triangle OAB$的面积.

解 由向量积的几何意义知

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|,$$

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=(-3,-3,1),$$

$$|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+1}=\sqrt{19}.$$

故

$$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{19}}{2}.$$

11. 已知 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$,

试利用行列式的性质证明

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}.$$

证 因为$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$,$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}$,

$$(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}c_x & c_y & c_z\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix},$$

而由行列式的性质知$\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c_x & c_y & c_z\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$,

故

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}.$$

12. 试用向量证明不等式:

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geqslant|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|,$$

其中 a_1、a_2、a_3、b_1、b_2、b_3 为任意实数. 并指出等号成立的条件.

证明 设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$.

由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 知, $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$, 从而

$$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2},$$

当 a_1,a_2,a_3 与 b_1,b_2,b_3 成比例, 即 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$ 时, 上述等式成立.

习题8-3 曲面及其方程

1. 一动点与两定点(2,3,1)和(4,5,6)等距离, 求这动点的轨迹方程.

解 设动点为 $M(x,y,z)$, 由题意知

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2+(z-6)^2},$$

经整理得 $4x+4y+10z-63=0$.

2. 建立以点(1,3,−2)为球心, 且通过坐标原点的球面方程.

解 设以点(1,3,−2)为球心, R 为半径的球面方程为

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=R^2.$$

球面过原点, 故 $R^2=(0-1)^2+(0-3)^2+(0+2)^2=14$,

从而所求球面方程为 $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=14$.

3. 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=0$ 表示什么曲面?

解 将已知方程整理成

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=(\sqrt{6})^2,$$

所以此方程表示以(1,−2,−1)为球心, 以 $\sqrt{6}$ 为半径的球面.

4. 求与坐标原点 O 及点(2,3,4)的距离之比为 1∶2 的点的全体所组成的曲面的方程, 它表示怎样的曲面?

解 设动点坐标为 (x,y,z), 根据题意有

$$\frac{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}}{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}}=\frac{1}{2},$$

化简整理得 $$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+(y+1)^2+\left(z+\frac{4}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\sqrt{29}\right)^2.$$

它表示以 $\left(-\frac{2}{3},-1,-\frac{4}{3}\right)$ 为球心, 以 $\frac{2}{3}\sqrt{29}$ 为半径的球面.

5. 将 xOz 坐标面上的抛物线 $z^2=5x$ 绕 x 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

解 以 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ 代替抛物线方程 $z^2=5x$ 中的 z, 得

$$(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2=5x,$$

即
$$y^2+z^2=5x.$$

注 xOz 面上的曲线 $F(x,z)=0$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程为 $F(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$.

6. 将 xOz 坐标面上的圆 $x^2+z^2=9$ 绕 z 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.

解 以 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代替圆方程 $x^2+y^2=9$ 中的 x，得

$$(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2=9,$$

即
$$x^2+y^2+z^2=9.$$

7. 将 xOy 坐标面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.

解 以 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ 代替双曲线方程 $4x^2-9y^2=36$ 中的 y，得该双曲线绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面方程为

$$4x^2-9(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2=36,$$

即
$$4x^2-9(y^2+z^2)=36.$$

以 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ 代替双曲线方程 $4x^2-9y^2=36$ 中的 x，得该双曲线绕 y 轴旋转一周而生成的旋转曲面方程为

$$4(\pm\sqrt{x^2+z^2})^2-9y^2=36,$$

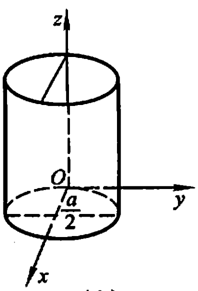
即
$$4(x^2+z^2)-9y^2=36.$$

8. 画出下列各方程所表示的曲面：

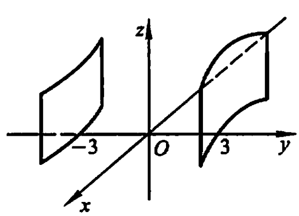
(1) $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$； (2) $-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$；

(3) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$； (4) $y^2-z=0$； (5) $z=2-x^2$.

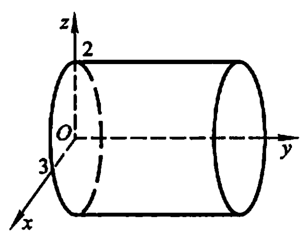
解 (1) 如图 8-8(1)； (2) 如图 8-8(2)； (3) 如图 8-8(3)；
(4) 如图 8-8(4)； (5) 如图 8-8(5).



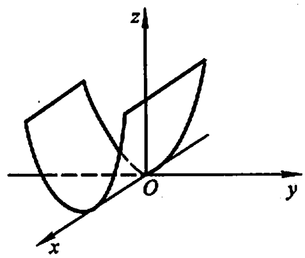
(1)



(2)



(3)



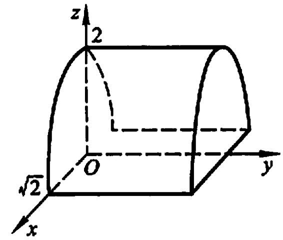


图 8-8

9. 指出下列方程在平面解析几何中和在空间解析几何中分别表示什么图形：

(1) $x=2$；　　(2) $y=x+1$；

(3) $x^2+y^2=4$；　　(4) $x^2-y^2=1$.

解　(1) $x=2$ 在平面解析几何中表示平行于 y 轴的一条直线，在空间解析几何中表示与 yOz 面平行的平面.

(2) $y=x+1$ 在平面解析几何中表示斜率为 1，y 轴截距也为 1 的一条直线，在空间解析几何中表示平行于 z 轴的平面.

(3) $x^2+y^2=4$ 在平面解析几何中表示圆心在原点，半径为 2 的圆，在空间解析几何中表示母线平行于 z 轴，准线为 $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ z=0\end{cases}$ 的圆柱面.

(4) $x^2-y^2=1$ 在平面解析几何中表示以 x 轴为实轴，y 轴为虚轴的双曲线，在空间解析几何中表示母线平行于 z 轴，准线为 $\begin{cases}x^2-y^2=1,\\ z=0\end{cases}$ 的双曲柱面.

10. 说明下列旋转曲面是怎样形成的：

(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$；　　(2) $x^2-\frac{y^2}{4}+z^2=1$；

(3) $x^2-y^2-z^2=1$；　　(4) $(z-a)^2=x^2+y^2$.

解　(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$ 表示 xOy 面上的椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面，或表示 xOz 面上的椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ 绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面.

(2) $x^2-\frac{y^2}{4}+z^2=1$ 表示 xOy 面上双曲线 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 绕 y 轴旋转一周而生成的旋转曲面，或表示 yOz 面上双曲线 $-\frac{y^2}{4}+z^2=1$ 绕 y 轴旋转一周而生成的旋转曲面.

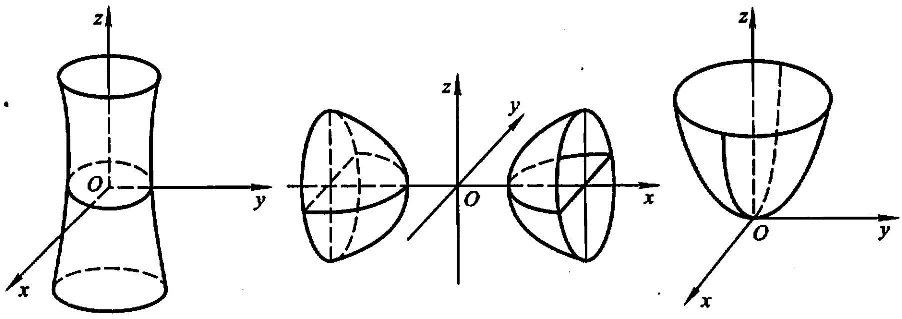
(3) $x^2-y^2-z^2=1$ 表示 xOy 面上双曲线 $x^2-y^2=1$ 绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面，或表示 xOz 面上双曲线 $x^2-z^2=1$ 绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面.

(4) $(z-a)^2=x^2+y^2$ 表示 xOz 面上直线 $z=x+a$ 或 $z=-x+a$ 绕 z 轴旋转一周而生成的旋转曲面，或表示 yOz 面上的直线 $z=y+a$ 或 $z=-y+a$ 绕 z 轴旋转一周而生成的旋转曲面.

11. 画出下列方程所表示的曲面：

(1) $4x^2+y^2-z^2=4$；　(2) $x^2-y^2-4z^2=4$；　(3) $\frac{z}{3}=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$.

解　(1) 如图 8−9(1)；　(2) 如图 8−9(2)；　(3)如 图 8−9(3).



(1)　　(2)　　(3)

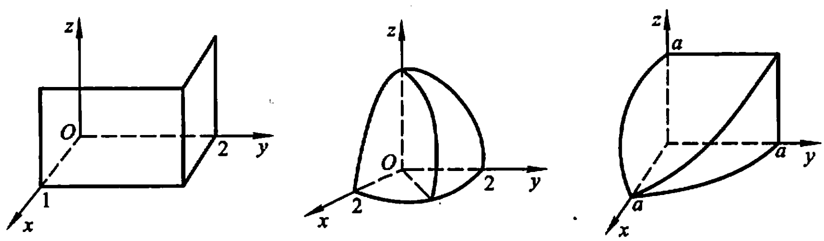
图 8−9

习题8−4　空间曲线及其方程

1. 画出下列曲线在第一卦限内的图形：

(1) $\begin{cases} x=1, \\ y=2; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \\ x-y=0; \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ x^2+z^2=a^2. \end{cases}$

解　(1) 如图 8−10(1)；　(2) 如图 8−10(2)；　(3) 如图 8−10(3).



(1)　　(2)　　(3)

图 8−10

2. 指出下列方程组在平面解析几何中与在空间解析几何中分别表示什么图形：

(1) $\begin{cases} y=5x+1, \\ y=2x-3; \end{cases}$　　　(2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1, \\ y=3. \end{cases}$

解 (1) $\begin{cases} y=5x+1, \\ y=2x-3 \end{cases}$ 在平面解析几何中表示两直线的交点，在空间解析几何中表示两平面的交线即空间直线.

(2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1, \\ y=3 \end{cases}$ 在平面解析几何中表示椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$与其切线 $y=3$ 的交点即切点. 在空间解析几何中表示椭圆柱面$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$与其切平面 $y=3$ 的交线即空间直线.

3. 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴而且通过曲线$\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16, \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$的柱面方程.

解 在$\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16, \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$中消去 x，得　　$3y^2-z^2=16$，

即为母线平行于 x 轴且通过已知曲线的柱面方程.

在$\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16, \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$中消去 y，得　　$3x^2+2z^2=16$，

即为母线平行于 y 轴且通过已知曲线的柱面方程.

4. 求球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xOy 面上的投影的方程.

解 在$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ x+z=1 \end{cases}$中消去 z，得

$$x^2+y^2+(1-x)^2=9, \text{即 } 2x^2-2x+y^2=8,$$

它表示母线平行于 z 轴的柱面，故$\begin{cases} 2x^2-2x+y^2=8, \\ z=0 \end{cases}$表示已知交线在 xOy 面上的投影的方程.

5. 将下列曲线的一般方程化为参数方程：

(1) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ y=x; \end{cases}$　　　(2) $\begin{cases} (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4, \\ z=0. \end{cases}$

解 (1) 将 $y=x$ 代入 $x^2+y^2+z^2=9$，得　　$2x^2+z^2=9$，

取　$x=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos t$，则 $z=3\sin t$，从而可得该曲线的参数方程

$$\begin{cases} x=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos t, \\ y=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos t, \\ z=3\sin t \end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

(2) 将 $z=0$ 代入 $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4$，得 $(x-1)^2+y^2=3$，取 $x-1=\sqrt{3}\cos t$，则 $y=\sqrt{3}\sin t$，从而可得该曲线的参数方程

$$\begin{cases} x=1+\sqrt{3}\cos t, \\ y=\sqrt{3}\sin t, \\ z=0 \end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

6. 求螺旋线 $\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=a\sin\theta, \\ z=b\theta \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

解　由 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta$ 得 $x^2+y^2=a^2$，故该螺旋线在 xOy 面上的投影曲线的直角坐标方程即为 $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ z=0. \end{cases}$

由 $y=a\sin\theta, z=b\theta$ 得 $y=a\sin\dfrac{z}{b}$，故该螺旋线在 yOz 面上的投影曲线的直角坐标方程即为 $\begin{cases} y=a\sin\dfrac{z}{b}, \\ x=0. \end{cases}$

由 $x=a\cos\theta, z=b\theta$ 得 $x=a\cos\dfrac{z}{b}$，故该螺旋线在 xOz 面上的投影曲线的直角坐标方程即为 $\begin{cases} x=a\cos\dfrac{z}{b}, \\ y=0. \end{cases}$

7. 求上半球 $0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与圆柱体 $x^2+y^2\leqslant ax(a>0)$ 的公共部分在 xOy 面和 xOz 面上的投影.

解　如图 8-11. 所求立体在 xOy 面上的投影即为 $x^2+y^2\leqslant ax$，而由

$$\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \\ x^2+y^2=ax \end{cases}$$

得 $z=\sqrt{a^2-ax}$. 故所求立体在 xOz 平面上的投影为由 x 轴，z 轴及曲线 $z=\sqrt{a^2-ax}$ 所围成的区域.

8. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 4)$ 在三坐标面上的投影.

解　联立$\begin{cases}z=x^2+y^2,\\z=4\end{cases}$得　$x^2+y^2=4.$

故旋转抛物面在 xOy 面上的投影为　$\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 4,\\z=0.\end{cases}$

如图 8－12，联立$\begin{cases}z=x^2+y^2,\\x=0\end{cases}$得 $z=y^2$，故旋转抛物面在 yOz 面上的投影为由 $z=y^2$ 及 $z=4$ 所围成的区域.

同理，联立$\begin{cases}z=x^2+y^2,\\y=0\end{cases}$得 $z=x^2$.

故旋转抛物面在 xOz 面上的投影为由 $z=x^2$ 及 $z=4$ 所围成的区域.

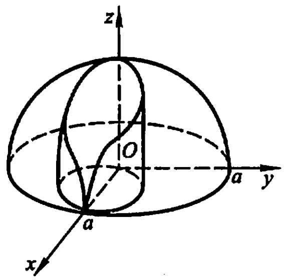


图 8－11

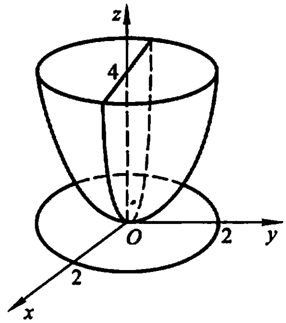


图 8－12

习题8－5　平面及其方程

1. 求过点(3,0,－1)且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行的平面方程.

解　所求平面与已知平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行. 因此所求平面的法向量可取为 $\boldsymbol{n}=(3,-7,5)$，设所求平面为

$$3x-7y+5z+D=0.$$

将点(3,0,－1)代入上式得 $D=-4$. 故所求平面方程为

$$3x-7y+5z-4=0.$$

2. 求过点 $M_0(2,9,-6)$且与连接坐标原点及点 M_0 的线段 OM_0 垂直的平面方程.

解　$\overrightarrow{OM_0}=(2,9,-6)$. 所求平面与$\overrightarrow{OM_0}$垂直，可取 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{OM_0}$，设所求平面方程为

$$2x+9y-6z+D=0.$$

将点 $M_0(2,9,-6)$代入上式，得 $D=-121$. 故所求平面方程为

$$2x+9y-6z-121=0.$$

3. 求过(1,1,−1)、(−2,−2,2)和(1,−1,2)三点的平面方程.

解　由$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ -2-1 & -2-1 & 2+1 \\ 1-1 & -1-1 & 2+1 \end{vmatrix}=0$,得 $x-3y-2z=0$,

即为所求平面方程.

注　设 $M(x,y,z)$ 为平面上任一点,$M_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3)$ 为平面上已知点. 由 $\overrightarrow{M_1M}\cdot(\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3})=0$,即

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0,$$

它就表示过已知三点 $M_i(i=1,2,3)$ 的平面方程.

4. 指出下列各平面的特殊位置,并画出各平面:

(1) $x=0$;　　(2) $3y-1=0$;

(3) $2x-3y-6=0$;　　(4) $x-\sqrt{3}y=0$;

(5) $y+z=1$;　　(6) $x-2z=0$;

(7) $6x+5y-z=0$.

解　(1)—(7)的平面分别如图 8-13(1)—(7).

(1) $x=0$ 表示 yOz 坐标面.

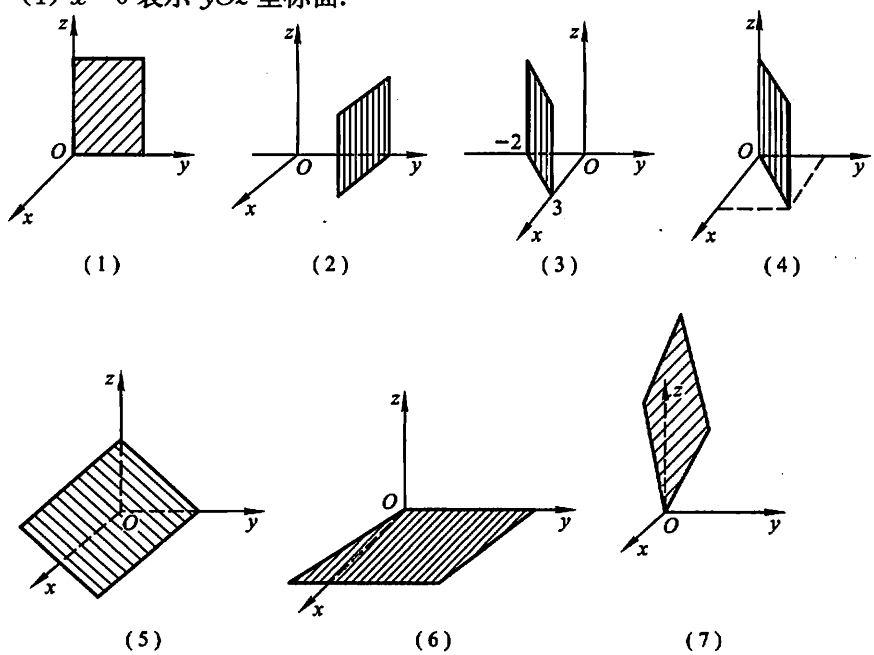


图 8-13

(2) $3y-1=0$ 表示过点$\left(0,\frac{1}{3},0\right)$与 y 轴垂直的平面.

(3) $2x-3y-6=0$ 表示与 z 轴平行的平面.

(4) $x-\sqrt{3}y=0$ 表示过 z 轴的平面.

(5) $y+z=1$ 表示平行于 x 轴的平面.

(6) $x-2z=0$ 表示过 y 轴的平面.

(7) $6x+5y-z=0$ 表示过原点的平面.

5. 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面的夹角的余弦.

解　平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$. 设平面与三个坐标面 xOy,yOz,zOx 的夹角分别为 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$. 则根据平面的方向余弦知

$$\cos\theta_1=\cos\gamma=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{k}|}=\frac{(2,-2,1)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\cdot 1}=\frac{1}{3},$$

$$\cos\theta_2=\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{i}|}=\frac{(2,-2,1)\cdot(1,0,0)}{3\cdot 1}=\frac{2}{3},$$

$$\cos\theta_3=\cos\beta=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{j}|}=\frac{(2,-2,1)\cdot(0,1,0)}{3\cdot 1}=-\frac{2}{3}.$$

6. 一平面过点$(1,0,-1)$且平行于向量 $\boldsymbol{a}=(2,1,1)$和 $\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$,试求该平面方程.

解　所求平面平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,可取平面的法向量

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=(1,1,-3),$$

故所求平面为　$1\cdot(x-1)+1\cdot(y-0)-3\cdot(z+1)=0$,

即　$x+y-3z-4=0$.

7. 求三平面 $x+3y+z=1,2x-y-z=0,-x+2y+2z=3$ 的交点.

解　联立三平面方程

$$\begin{cases}x+3y+z=1,\\ 2x-y-z=0,\\ -x+2y+2z=3.\end{cases}$$

解此方程组得 $x=1,y=-1,z=3$. 故所求交点为$(1,-1,3)$.

8. 分别按下列条件求平面方程:

(1) 平行于 xOz 面且经过点$(2,-5,3)$;

(2) 通过 z 轴和点$(-3,1,-2)$;

(3) 平行于 x 轴且经过两点$(4,0,-2)$和$(5,1,7)$.

解　(1) 所求平面平行于 xOz 面,故设所求平面方程为 $By+D=0$. 将点$(2,-5,3)$代入,得

$$-5B+D=0, \text{即} \quad D=5B.$$

因此,所求平面方程为

$$By+5B=0, \text{即} \quad y+5=0.$$

(2) 所求平面过 z 轴. 故设所求平面方程为 $Ax+By=0$. 将点$(-3,1,-2)$代入,得

$$-3A+B=0, \text{即} \quad B=3A.$$

因此,所求平面方程为

$$Ax+3Ay=0, \text{即} \quad x+3y=0.$$

(3) 所求平面平行于 x 轴,故设所求平面方程为 $By+Cz+D=0$. 将点$(4,0,-2)$及$(5,1,7)$代别代入方程得

$$-2C+D=0 \quad \text{及} \quad B+7C+D=0.$$

从而解得

$$C=\frac{D}{2}, B=-\frac{9}{2}D.$$

因此,所求平面方程为

$$-\frac{9}{2}Dy+\frac{D}{2}z+D=0,$$

即

$$9y-z-2=0.$$

9. 求点$(1,2,1)$到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离.

解　利用点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式

$$\begin{aligned} d&=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ &=\frac{|1+2\cdot 2+2\cdot 1-10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{|-3|}{3}=1. \end{aligned}$$

习题 8-6　空间直线及其方程

1. 求过点$(4,-1,3)$且平行于直线$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{5}$的直线方程.

解　所求直线与已知直线平行,故所求直线的方向向量 $s=(2,1,5)$,直线方程即为

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{5}.$$

2. 求过两点 $M_1(3,-2,1)$和 $M_2(-1,0,2)$的直线方程.

解　取所求直线的方向向量

$$s=\overrightarrow{M_1M_2}=(-1-3,0-(-2),2-1)=(-4,2,1),$$

因此所求直线方程为

$$\frac{x-3}{-4}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}.$$

3. 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases}x-y+z=1,\\2x+y+z=4.\end{cases}$$

解 根据题意可知已知直线的方向向量

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&1\\2&1&1\end{vmatrix}=(-2,1,3).$$

取 $x=0$,代入直线方程得 $\begin{cases}-y+z=1,\\y+z=4.\end{cases}$ 解得 $y=\frac{3}{2},z=\frac{5}{2}$. 这样就得到直线经过的一点 $\left(0,\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$. 因此直线的对称式方程为

$$\frac{x-0}{-2}=\frac{y-\frac{3}{2}}{1}=\frac{z-\frac{5}{2}}{3}.$$

参数方程为

$$\begin{cases}x=-2t,\\y=\frac{3}{2}+t,\\z=\frac{5}{2}+3t.\end{cases}$$

注 由于所取的直线上的点可以不同,因此所得到的直线对称式或参数方程的表达式也可以是不同的.

4. 求过点(2,0,-3)且与直线

$$\begin{cases}x-2y+4z-7=0,\\3x+5y-2z+1=0\end{cases}$$

垂直的平面方程.

解 根据题意,所求平面的法向量可取已知直线的方向向量,即

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-2&4\\3&5&-2\end{vmatrix}=(-16,14,11),$$

故所求平面方程为 $-16(x-2)+14(y-0)+11(z+3)=0.$

即 $$16x-14y-11z-65=0.$$

5. 求直线 $\begin{cases}5x-3y+3z-9=0,\\3x-2y+z-1=0\end{cases}$ 与直线 $\begin{cases}2x+2y-z+23=0,\\3x+8y+z-18=0\end{cases}$ 的夹角的

余弦.

解　两已知直线的方向向量分别为

$$s_1=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=(3,4,-1),s_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix}=(10,-5,10),$$

因此,两直线的夹角的余弦

$$\cos\theta=\cos(\widehat{s_1,s_2})=\frac{s_1\cdot s_2}{|s_1||s_2|}$$

$$=\frac{3\times10-4\times5-1\times10}{\sqrt{3^2+4^2+(-1)^2}\sqrt{10^2+(-5)^2+10^2}}=0.$$

6. 证明直线$\begin{cases}x+2y-z=7,\\-2x+y+z=7\end{cases}$与直线$\begin{cases}3x+6y-3z=8,\\2x-y-z=0\end{cases}$平行.

证明　已知直线的方向向量分别是

$$s_1=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(3,1,5),s_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=(-9,-3,-15),$$

由 $s_2=-3s_1$ 知两直线互相平行.

7. 求过点(0,2,4)且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程.

解　所求直线与已知的两个平面平行. 因此所求直线的方向向量可取

$$s=n_1\times n_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}=(-2,3,1),$$

故所求直线方程为

$$\frac{x-0}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}.$$

注　本题也可以这样解:由于所求直线与已知的两个平面平行,则可视所求直线是分别与已知平面平行的两平面的交线. 不妨设所求直线为

$$\begin{cases}x+2z=a,\\y-3z=b.\end{cases}$$

将点(0,2,4)代入上式,得 $a=8,b=-10$. 故所求直线为

$$\begin{cases}x+2z=8,\\y-3z=-10.\end{cases}$$

8. 求过点(3,1,−2)且通过直线$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$的平面方程.

解　利用平面束方程,过直线$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$的平面束方程为

$$\frac{x-4}{5}-\frac{y+3}{2}+\lambda\left(\frac{y+3}{2}-z\right)=0,$$

将点(3,1,−2)代入上式得 $\lambda=\frac{11}{20}$.

因此所求平面方程为 $\frac{x-4}{5}-\frac{y+3}{2}+\frac{11}{20}\left(\frac{y+3}{2}-z\right)=0,$

即
$$8x-9y-22z-59=0.$$

9. 求直线$\begin{cases}x+y+3z=0,\\ x-y-z=0\end{cases}$与平面 $x-y-z+1=0$ 的夹角.

解 已知直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&3\\1&-1&-1\end{vmatrix}=(2,4,-2)$,

平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$.

设直线与平面的夹角为 φ,则

$$\sin\varphi=|\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}})|=\frac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|2\cdot1+4\cdot(-1)+(-2)\cdot(-1)|}{\sqrt{2^2+4^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=0,$$

即 $\varphi=0$.

10. 试确定下列各组中的直线和平面间的关系:

(1) $\frac{x+3}{-2}=\frac{y+4}{-7}=\frac{z}{3}$和 $4x-2y-2z=3$;

(2) $\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{7}$和 $3x-2y+7z=8$;

(3) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$和 $x+y+z=3$.

解 设直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}$,平面的法向量为 $\boldsymbol{n}$,直线与平面的夹角为 φ,且

$$\sin\varphi=|\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}})|=\frac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{n}|}.$$

(1) $\boldsymbol{s}=(-2,-7,3)$,$\boldsymbol{n}=(4,-2,-2)$,

$$\sin\varphi=\frac{|(-2)\cdot4+(-7)\cdot(-2)+3\cdot(-2)|}{\sqrt{(-2)^2+(-7)^2+3^2}\cdot\sqrt{4^2+(-2)^2+(-2)^2}}=0,$$

即 $\varphi=0$. 故直线平行于平面或在平面上,现将直线上的点 $A(-3,-4,0)$代入平面方程,方程不成立. 故点 A 不在平面上,因此直线不在平面上,直线与平面平行.

(2) $\boldsymbol{s}=(3,-2,7)$,$\boldsymbol{n}=(3,-2,7)$,由于 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}$ 或

$$\sin\varphi=\frac{|3\cdot3+(-2)\cdot(-2)+7\cdot7|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+7^2}\cdot\sqrt{3^2+(-2)^2+7^2}}=1,$$

知 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，故直线与平面垂直.

(3) $\boldsymbol{s}=(3,1,-4)$，$\boldsymbol{n}=(1,1,1)$，由于 $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 或

$$\sin\varphi=\frac{|3\cdot 1+1\cdot 1+(-4)\cdot 1|}{\sqrt{3^2+1^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=0,$$

知 $\varphi=0$，将直线上的点 $A(2,-2,3)$ 代入平面方程. 方程成立. 即点 A 在平面上. 故直线在平面上.

11. 求过点 $(1,2,1)$ 而与两直线

$$\begin{cases}x+2y-z+1=0,\\x-y+z-1=0\end{cases}\text{和}\begin{cases}2x-y+z=0,\\x-y+z=0\end{cases}$$

平行的平面的方程.

解 两直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&2&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=(1,-2,-3),\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=(0,-1,-1),$$

取

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-2&-3\\0&-1&-1\end{vmatrix}=(-1,1,-1),$$

则过点 $(1,2,1)$，以 $\boldsymbol{n}$ 为法向量的平面方程为

$$-1\cdot(x-1)+1\cdot(y-2)-1\cdot(z-1)=0,$$

即

$$x-y+z=0.$$

12. 求点 $(-1,2,0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影.

解 作过已知点且与已知平面垂直的直线. 该直线与平面的交点即为所求. 根据题意，过点 $(-1,2,0)$ 与平面 $x+2y-z+1=0$ 垂直的直线为

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-0}{-1},$$

将它化为参数方程 $x=-1+t,y=2+2t,z=-t$，代入平面方程得

$$-1+t+2(2+2t)-(-t)+1=0,$$

整理得 $t=-\frac{2}{3}$. 从而所求点 $(-1,2,0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影为 $\left(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

13. 求点 $P(3,-1,2)$ 到直线 $\begin{cases}x+y-z+1=0,\\2x-y+z-4=0\end{cases}$ 的距离.

解 直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&-1\\2&-1&1\end{vmatrix}=(0,-3,-3).$

在直线上取点$(1,-2,0)$，这样，直线的方程可表示成参数方程形式

$$x=1,\ y=-2-3t,\ z=-3t. \tag{1}$$

又，过点$P(3,-1,2)$，以$s=(0,-3,-3)$为法向量的平面方程为

$$-3(y+1)-3(z-2)=0,$$

即

$$y+z-1=0. \tag{2}$$

将式(1)代入式(2)得$t=-\frac{1}{2}$，于是直线与平面的交点为$\left(1,-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$，故

$$d=\sqrt{(3-1)^2+\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

14. 设M_0是直线l外一点，M是直线l上任意一点，且直线的方向向量为s，试证：点M_0到直线l的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times s|}{|s|}.$$

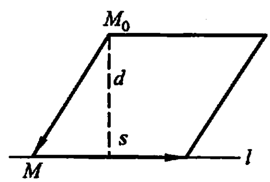


图 8-14

证 如图 8-14，点M_0到直线l的距离为d. 由向量积的几何意义知$|\overrightarrow{M_0M}\times s|$表示以$\overrightarrow{M_0M}$，$s$为邻边的平行四边形的面积. 而$\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times s|}{|s|}$表示以$|s|$为边长的该平行四边形的高. 即为点$M_0$到直线$l$的距离. 于是

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times s|}{|s|}.$$

15. 求直线$\begin{cases}2x-4y+z=0,\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$在平面$4x-y+z=1$上的投影直线的方程.

解 作过已知直线的平面束，在该平面束中找出与已知平面垂直的平面，该平面与已知平面的交线即为所求.

设过直线$\begin{cases}2x-4y+z=0,\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$的平面束方程为

$$2x-4y+z+\lambda(3x-y-2z-9)=0,$$

经整理得

$$(2+3\lambda)x+(-4-\lambda)y+(1-2\lambda)z-9\lambda=0.$$

由

$$(2+3\lambda)\cdot 4+(-4-\lambda)\cdot(-1)+(1-2\lambda)\cdot 1=0,$$

得$\lambda=-\frac{13}{11}$. 代入平面束方程，得

$$17x+31y-37z-117=0.$$

因此所求投影直线的方程为

$$\begin{cases}17x+31y-37z-117=0,\\4x-y+z=1.\end{cases}$$

16. 画出下列各曲面所围成的立体的图形：

(1) $x=0, y=0, z=0, x=2, y=1, 3x+4y+2z-12=0$;

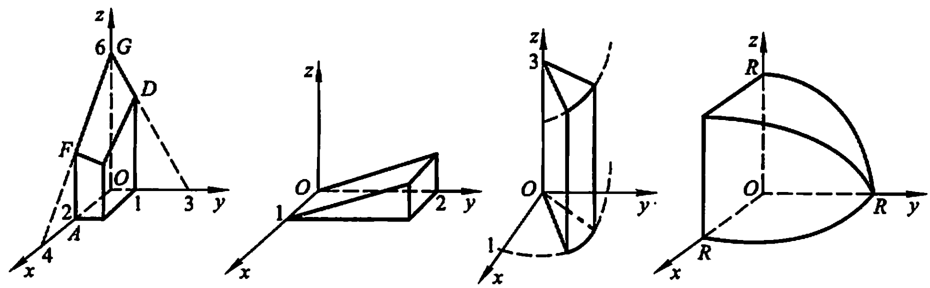
(2) $x=0, z=0, x=1, y=2, z=\dfrac{y}{4}$;

(3) $z=0, z=3, x-y=0, x-\sqrt{3}y=0, x^2+y^2=1$(在第一卦限内);

(4) $x=0, y=0, z=0, x^2+y^2=R^2, y^2+z^2=R^2$(在第一卦限内).

解 (1) 如图 8-15(1); (2) 如图 8-15(2);

(3) 如图 8-15(3); (4) 如图 8-15(4).



(1) (2) (3) (4)

图 8-15

总习题八

1. 填空

(1) 设在坐标系$[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$中点 A 和点 M 的坐标依次为(x_0, y_0, z_0)和(x,y,z),则在$[A;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$坐标系中,点 M 的坐标为__________,向量$\overrightarrow{OM}$的坐标为________.

(2) 设数 λ_1、λ_2、λ_3 不全为 0,使 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 三个向量是______的.

(3) 设 $\boldsymbol{a}=(2,1,2)$,$\boldsymbol{b}=(4,-1,10)$,$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}$,且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$,则 $\lambda=$________.

(4) 设$|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=4$,$|\boldsymbol{c}|=5$,且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,则$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|=$________.

解 (1) 点 M 的坐标为 $\underline{(x-x_0, y-y_0, z-z_0)}$,向量$\overrightarrow{OM}$的坐标为$(x-x_0+x_0, y-y_0+y_0, z-z_0+z_0)=\underline{(x,y,z)}$.

(2) 由$[(\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{c}=0$ 得$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$. 即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 共面.

(3) $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}=(4,-1,10)-\lambda(2,1,2)=(4-2\lambda,-1-\lambda,10-2\lambda)$.

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$,故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=(2,1,2)\cdot(4-2\lambda,-1-\lambda,10-2\lambda)=27-9\lambda=0$,从而 $\lambda=\underline{3}$.

(4) 由$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 知 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$;

由$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 知 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

又，由$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{c}|^2$知以向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为边的三角形为直角三角形，且$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 故

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|=3|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=3|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$$
$$=3\times3\times4\times1=\underline{36}.$$

2. 在y轴上求与点$A(1,-3,7)$和点$B(5,7,-5)$等距离的点.

解 根据题意，设所求点为$M(0,y,0)$，由

$$1^2+(y+3)^2+7^2=5^2+(y-7)^2+(-5)^2$$

得$y=2$. 故所求点为$M(0,2,0)$.

3. 已知$\triangle ABC$的顶点为$A(3,2,-1)$、$B(5,-4,7)$和$C(-1,1,2)$，求从顶点C所引中线的长度.

解 设AB中点的坐标为(x_0,y_0,z_0)，由

$$x_0=\frac{3+5}{2}=4,y_0=\frac{2-4}{2}=-1,z_0=\frac{7-1}{2}=3,$$

从而顶点C所引中线的长度

$$d=\sqrt{(4+1)^2+(-1-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{30}.$$

4. 设$\triangle ABC$的三边$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$、$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$、$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，三边中点依次为$D$、$E$、$F$，试用向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$表示$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{CF}$，并证明

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{0}.$$

证明 如图8－16，D、E、F分别为BC、CA、AB的中点，因此

$$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{\boldsymbol{a}}{2},\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{\boldsymbol{b}}{2},\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{\boldsymbol{c}}{2},$$

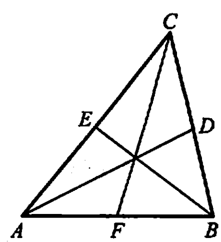


图 8－16

从而
$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{c}+\frac{\boldsymbol{a}}{2},$$
$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\boldsymbol{a}+\frac{\boldsymbol{b}}{2},$$
$$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{c}}{2},$$

故 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{c}+\frac{\boldsymbol{a}}{2}+\boldsymbol{a}+\frac{\boldsymbol{b}}{2}+\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{c}}{2}=\frac{3}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}.$

5. 试用向量证明三角形两边中点的连线平行于第三边，且其长度等于第三边长度的一半.

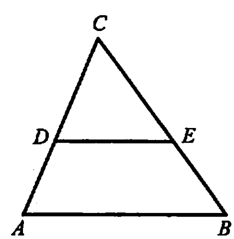


图 8－17

证明 如图8－17，D、E分别是CA与BC的中点.

由$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=2(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE})=2\overrightarrow{DE}$.

知 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{DE}$且$|\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$.

即三角形两边中点的连线平行于第三边，且长度等于第三边长度的一半.

6. 设$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，$\boldsymbol{a}=(3,-5,8)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1,z)$，求 z.

解 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3-1,-5+1,8+z)=(2,-4,8+z)$，

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3-(-1),-5-1,8-z)=(4,-6,8-z)$，

由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$知

$$\sqrt{2^2+(-4)^2+(8+z)^2}=\sqrt{4^2+(-6)^2+(8-z)^2},$$

经整理得 $z=1$.

7. 设$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{6}$，求向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角.

解
$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\\&=(\sqrt{3})^2+1^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{6}\\&=4+2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=7,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2&=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\\&=(\sqrt{3})^2+1^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{6}\\&=4-2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1,\end{aligned}$$

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=3-1=2$，

故
$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}})=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{2}{\sqrt{7}\cdot1}=\frac{2}{\sqrt{7}},$$

所以$(\widehat{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}})=\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$.

8. 设 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\perp7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}\perp7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，求$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

解 由 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\perp7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 知$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0$，

由 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}\perp7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 知$(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$，

故
$$7|\boldsymbol{a}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15|\boldsymbol{b}|^2=0,\tag{1}$$
$$7|\boldsymbol{a}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8|\boldsymbol{b}|^2=0.\tag{2}$$

两式相减得 $46\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-23|\boldsymbol{b}|^2$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2$，代入(1)式得

$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|,$$

从而
$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}=\frac{1}{2},$$

所以
$$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{3}.$$

9. 设 $\boldsymbol{a}=(2,-1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(1,1,z)$，问 z 为何值时 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 最小？并求出此最小值.

解 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{(2,-1,-2)\cdot(1,1,z)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+z^2}}$

$$=\frac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}.$$

设 $f(z)=\dfrac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}$，则

$$f'(z)=\frac{1}{3}\cdot\frac{-2\sqrt{2+z^2}-(1-2z)\dfrac{z}{\sqrt{2+z^2}}}{2+z^2}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{-4-z}{(2+z^2)^{3/2}},$$

令 $f'(z)=0$ 得 $z=-4$.

由于 $0\leqslant(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 为单调减少函数. $f(z)$ 取得最大值时，$\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 达到最小值.

经验证 $z=-4$ 时，$f(z)$ 达到最大值，此时 $\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 达到最小值且由 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})|_{\max}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，知 $\theta_{\min}=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi}{4}$.

10. 设 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{6}$，求以 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积.

解 根据向量积的几何意义知以 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积

$$S=|(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})|$$

$$=5|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=5|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$$

$$=5\times4\times3\times\sin\frac{\pi}{6}=5\times4\times3\times\frac{1}{2}=30.$$

11. 设 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2,3)$，$\boldsymbol{c}=(2,1,2)$，向量 $\boldsymbol{r}$ 满足 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{r}=14$，求 $\boldsymbol{r}$.

解 设向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$.

由 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a}$ 知 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}=0$，即 $\qquad 2x-3y+z=0.$

由 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$ 知 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $\qquad x-2y+3z=0.$

由 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{r}=\dfrac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=14$ 知 $\qquad 2x+y+2z=14|\boldsymbol{c}|=14\times3=42,$

联立上述三个方程得 $x=14, y=10, z=2$. 故 $\boldsymbol{r}=(14,10,2)$.

12. 设 $\boldsymbol{a}=(-1,3,2)$, $\boldsymbol{b}=(2,-3,-4)$, $\boldsymbol{c}=(-3,12,6)$, 证明三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面, 并用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{c}$.

证明 由 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & -3 & -4\\ -3 & 12 & 6\end{vmatrix}=0$ 知 $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=0$, 故三个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面.

设 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$, 则

$$\begin{aligned}(-3,12,6)&=\lambda(-1,3,2)+\mu(2,-3,-4)\\&=(-\lambda+2\mu, 3\lambda-3\mu, 2\lambda-4\mu),\end{aligned}$$

即
$$\begin{cases}-\lambda+2\mu=-3,\\ 3\lambda-3\mu=12,\\ 2\lambda-4\mu=6,\end{cases}$$

解得 $\lambda=5$, $\mu=1$. 故 $\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

13. 已知动点 $M(x,y,z)$ 到 xOy 平面的距离与点 M 到点 $(1,-1,2)$ 的距离相等, 求点 M 的轨迹的方程.

解 根据题意知

$$|z|=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2},$$

即 $(x-1)^2+(y+1)^2-4(z-1)=0$ 为点 M 的轨迹的方程.

14. 指出下列旋转曲面的一条母线和旋转轴:

(1) $z=2(x^2+y^2)$; (2) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{36}=1$;

(3) $z^2=3(x^2+y^2)$; (4) $x^2-\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{4}=1$.

解 (1) 母线为 $\begin{cases}x=0,\\ z=2y^2,\end{cases}$ 旋转轴为 z 轴.

(2) 母线为 $\begin{cases}x=0,\\ \dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{36}=1,\end{cases}$ 旋转轴为 y 轴.

(3) 母线为 $\begin{cases}x=0,\\ z=\sqrt{3}y,\end{cases}$ 旋转轴为 z 轴.

(4) 母线为 $\begin{cases}z=0,\\ x-\dfrac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 旋转轴为 x 轴.

15. 求通过点 $A(3,0,0)$ 和 $B(0,0,1)$ 且与 xOy 面成 $\dfrac{\pi}{3}$ 角的平面的方程.

解 设所求平面方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

平面过点 $A(3,0,0)$，$B(0,0,1)$，故 $a=3$，$c=1$. 这样平面方程为

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{b}+z=1.$$

它与 xOy 面成$\frac{\pi}{3}$角. 故

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{b},1\right)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+1^2}\cdot 1},$$

即 $$\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+1=4,\ \frac{1}{b}=\pm\frac{\sqrt{26}}{3},$$

故所求平面为　$x+\sqrt{26}y+3z=3$　或　$x-\sqrt{26}y+3z=3$.

16. 设一平面垂直于平面 $z=0$，并通过从点 $(1,-1,1)$ 到直线 $\begin{cases}y-z+1=0,\\x=0\end{cases}$ 的垂线，求此平面的方程.

解 直线$\begin{cases}y-z+1=0,\\x=0\end{cases}$的方向向量

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\0 & 1 & -1\\1 & 0 & 0\end{vmatrix}=(0,-1,-1).$$

作过点 $(1,-1,1)$ 且以 $\boldsymbol{s}=(0,-1,-1)$ 为法向量的平面：

$$-1\cdot(y+1)-(z-1)=0，\text{即 } y+z=0,$$

联立$\begin{cases}y-z+1=0,\\x=0,\\y+z=0\end{cases}$ 得垂足$\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

所求平面垂直于平面 $z=0$. 设平面方程 $Ax+By+D=0$. 平面过点 $(1,-1,1)$ 及垂足$\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，故有

$$\begin{cases}A-B+D=0,\\-\frac{1}{2}B+D=0,\end{cases}$$

由此解得 $B=2D$，$A=D$. 因此所求平面方程为 $Dx+2Dy+D=0$，即

$$x+2y+1=0.$$

17. 求过点 $(-1,0,4)$，且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$，又与直线$\frac{x+1}{1}=$

$\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$相交的直线的方程.

解 设所求直线方程

$$\frac{x+1}{m}=\frac{y-0}{n}=\frac{z-4}{p}.$$

所求直线平行于平面 $3x-4y+z-10=0$,故有

$$3m-4n+p=0, \tag{1}$$

又所求直线与直线$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$相交,故有

$$\begin{vmatrix} -1-(-1) & 3-0 & 0-4 \\ 1 & 1 & 2 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0,$$

即

$$10m-4n-3p=0. \tag{2}$$

联立(1)、(2)式可得
$$\frac{16}{m}=\frac{19}{n}=\frac{28}{p}.$$

因此所求直线方程为
$$\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}.$$

注 若两直线 l_1:$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$,$l_2$:$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$相交,则 l_1 与 l_2 必共面,故
$$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(s_1\times s_2)=0,$$

即有

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.$$

18. 已知点 $A(1,0,0)$及点 $B(0,2,1)$,试在 z 轴上求一点 C,使$\triangle ABC$ 的面积最小.

解 所求点位于 z 轴,设其坐标为 $C(0,0,z)$,由向量的几何意义知

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|,$$

而

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0-1 & 2-0 & 1-0 \\ 0-1 & 0-0 & z-0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & z \end{vmatrix}$$
$$=2z\boldsymbol{i}+(z-1)\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

故

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{(2z)^2+(z-1)^2+2^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5z^2-2z+5}.$$

设 $f(z)=5z^2-2z+5$,则由 $f'(z)=10z-2=0$ 得 $z=\frac{1}{5}$. 因 $f''\left(\frac{1}{5}\right)=10>0$,故当 $z=\frac{1}{5}$时,$\triangle ABC$ 的面积取得极小值,由于驻点惟一,故当 $z=\frac{1}{5}$,即 C 的

坐标为$\left(0,0\ \frac{1}{5}\right)$时，$S_{\triangle ABC}$为最小.

19. 求曲线$\begin{cases} z=2-x^2-y^2, \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$在三个坐标面上的投影曲线的方程.

解 在$\begin{cases} z=2-x^2-y^2, \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$中消去 z，得 $2-x^2-y^2=(x-1)^2+(y-1)^2$，即 $x^2+y^2-x-y=0$. 故$\begin{cases} x^2+y^2-x-y=0, \\ z=0 \end{cases}$为曲线在 xOy 面上的投影曲线方程.

在$\begin{cases} z=2-x^2-y^2, \\ z=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$中消去 y，得 $z=(x-1)^2+(\pm\sqrt{2-x^2-z^2}-1)^2$，即 $2x^2+2xz+z^2-4x-3z+2=0$，故$\begin{cases} 2x^2+2xz+z^2-4x-3z+2=0, \\ y=0 \end{cases}$为曲线在 xOz 面上的投影曲线方程.

同理，可得$\begin{cases} 2y^2+2yz+z^2-4y-3z+2=0, \\ x=0. \end{cases}$它就是曲线在 yOz 面上的投影曲线方程.

20. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$与柱面 $z^2=2x$ 所围立体在三个坐标面上的投影.

解 在$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, \\ z^2=2x \end{cases}$中消去 z，得 $2x=x^2+y^2$，即$(x-1)^2+y^2=1$，

故立体在 xOy 面上的投影为$\begin{cases} (x-1)^2+y^2\leqslant 1, \\ z=0. \end{cases}$

而该立体在 xOz 平面上的投影为$\begin{cases} x\leqslant z\leqslant\sqrt{2x}, \\ y=0 \end{cases}$（如图 8－18），在 yOz 面上的投影为$\begin{cases} \left(\frac{z^2}{2}-1\right)^2+y^2\leqslant 1, z\geqslant 0, \\ x=0. \end{cases}$

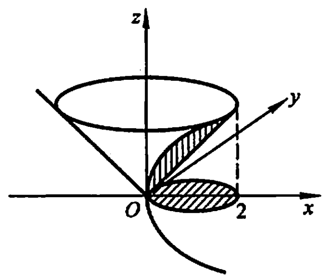


图 8－18

21. 画出下列各曲面所围立体的图形：

(1) 抛物柱面 $2y^2=x$，平面 $z=0$ 及$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$；

(2) 抛物柱面 $x^2=1-z$，平面 $y=0, z=0$ 及 $x+y=1$；

(3) 圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$及旋转抛物面 $z=2-x^2-y^2$；

(4) 旋转抛物面 $x^2+y^2=z$，柱面 $y^2=x$，平面 $z=0$ 及 $x=1$.

解 (1) 如图 8－19(1)；　(2) 如图 8－19(2)；

(3) 如图 8－19(3)；　　(4) 如图 8－19(4).

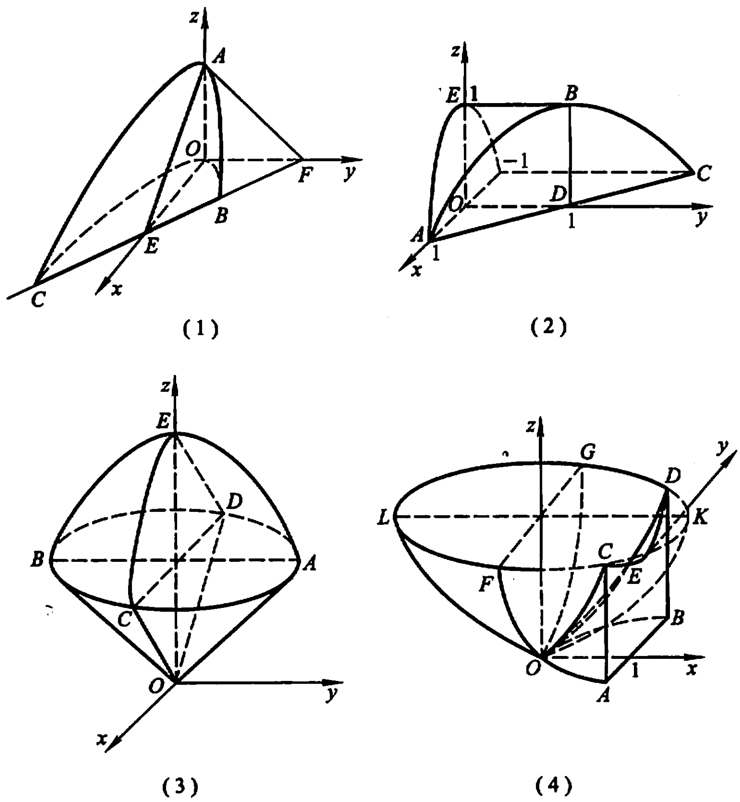


图 8－19

注　在建立了空间直角坐标系后，可按下列方法作图：

1°　先作出立体的各表面（曲面），及它们与各坐标面的交线；

2°　再作各曲面的交线.

第九章　多元函数微分法及其应用

习题9-1　多元函数的基本概念

1. 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集？并分别指出它们的聚点所成的点集（称为导集）和边界.

(1) $\{(x,y)\mid x\neq 0,y\neq 0\}$；　(2) $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$；

(3) $\{(x,y)\mid y>x^2\}$；

(4) $\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2\geqslant 1\}\cap\{(x,y)\mid x^2+(y-2)^2\leqslant 4\}$.

解　(1) 集合是开集，无界集；导集为 $\mathbf{R}^2$，边界为 $\{(x,y)\mid x=0$ 或 $y=0\}$.

(2) 集合既非开集，又非闭集，是有界集；导集为 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$，边界为 $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\}$.

(3) 集合是开集，区域，无界集；导集为 $\{(x,y)\mid y\geqslant x^2\}$，边界为 $\{(x,y)\mid y=x^2\}$.

(4) 集合是闭集，有界集；导集为集合本身，边界为 $\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2=1\}\cup\{(x,y)\mid x^2+(y-2)^2=4\}$.

2. 已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$，试求 $f(tx,ty)$.

解
$$\begin{aligned}f(tx,ty)&=(tx)^2+(ty)^2-(tx)(ty)\tan\frac{tx}{ty}\\&=t^2\left(x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y}\right)\\&=t^2f(x,y).\end{aligned}$$

3. 试证函数 $F(x,y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系式
$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$$

证
$$\begin{aligned}F(xy,uv)&=\ln(xy)\cdot\ln(uv)=(\ln x+\ln y)(\ln u+\ln v)\\&=\ln x\cdot\ln u+\ln x\cdot\ln v+\ln y\cdot\ln u+\ln y\cdot\ln v\\&=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).\end{aligned}$$

4. 已知函数 $f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$，试求 $f(x+y,x-y,xy)$.

解　$f(x+y,x-y,xy)=(x+y)^{xy}+(xy)^{(x+y)+(x-y)}=(x+y)^{xy}+(xy)^{2x}$.

5. 求下列各函数的定义域：

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$；　　(2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$；

(3) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；　　(4) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$；

(5) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}(R>r>0)$；

(6) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 (1) $\{(x,y)\mid y^2-2x+1>0\}$.

(2) $\{(x,y)\mid x+y>0,x-y>0\}$.

(3) $\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^2\geqslant y\}$.

(4) $\{(x,y)\mid y-x>0,x\geqslant 0,x^2+y^2<1\}$.

(5) $\{(x,y,z)\mid r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$.

(6) $\{(x,y,z)\mid x^2+y^2-z^2\geqslant 0,x^2+y^2\neq 0\}$.

注 本题是求多元函数的定义域，与求一元函数的定义域相类似，先写出构成该函数的各个简单函数的定义域，再求出表示这些定义域的集合的交集，即得所求定义域.

6. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$；　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1}$；

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\tan(xy)}{y}$；　　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

解 (1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}=\dfrac{1-0}{0+1}=1$.

注 本题利用多元初等函数的连续性求极限，即极限值等于函数值. 对于多元初等函数在点 P_0 处的极限，若 P_0 在该函数的定义区域内，均可利用此方法求极限.

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1+0}}=\ln 2$.

(3) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4-(xy+4)}{xy(2+\sqrt{xy+4})}$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\frac{1}{4}.$$

注 本题分母的极限为零，不能运用商的极限运算法则，而采用通过分母或分子有理化等方法，消去分母中趋于零的因子，再运用极限运算法则，这是求极限的基本方法之一.

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{1-e^{xy}}\cdot(\sqrt{2-e^{xy}}+1)=-1\cdot 2=-2.$

注 本题利用 $e^{xy}-1\sim xy((x,y)\to(0,0))$，相当于令 $u=xy$，当 $(x,y)\to(0,0)$ 且 $xy\neq 0$ 时，有 $u\to 0$ 且 $u\neq 0$，于是

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{1-e^{xy}}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{-u}=-1.$$

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\tan(xy)}{y}=\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\tan(xy)}{xy}\cdot x=1\cdot 2=2.$

注 本题利用 $\tan(xy)\sim xy((x,y)\to(2,0))$.

(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{e^{x^2y^2}}$

$$=\frac{1}{2}\cdot 0=0.$$

注 本题利用 $1-\cos(x^2+y^2)\sim\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^2((x,y)\to(0,0))$.

*7. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

证 (1) 当 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+k)x}{(1-k)x}=\frac{1+k}{1-k}\ (k\neq 1).$$

显然它是随着 k 的值不同而改变的，故所求极限不存在.

(2) 依次取 $(x,y)\to(0,0)$ 的两种方式：$y=x$，$y=-x$，分别求极限：

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-x}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+4}=0.$$

两种方式求得的极限值不同，故所求极限不存在.

注 本题证明极限不存在所采用的方法是：找出两条不同的路径，使得点 P 沿这两条路径趋于 P_0 时，$f(P)$ 的极限存在但不相等；或者找出一条特殊的路径，使得点 P 沿这条路径趋于 P_0 时，$f(P)$ 的极限不存在. 这是证明多元函数极限不存在常用的方法.

8. 函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 在何处是间断的？

解 这函数的定义域为 $D=\{(x,y)\mid y^2-2x\neq 0\}$，曲线 $y^2-2x=0$ 上各点均为 D 的聚点，且函数在这些点处没有定义，因此曲线 $y^2-2x=0$ 上各点均为函数的间断点.

*9. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

证 因为 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\leqslant\dfrac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$,

要使 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon$，只要 $\sqrt{x^2+y^2}<2\varepsilon$，所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=2\varepsilon$，则当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，就有 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon$ 成立，即 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

*10. 设 $F(x,y)=f(x)$，$f(x)$ 在 x_0 处连续，证明：对任意 $y_0\in R$，$F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

证 设 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$，因为 $f(x)$ 在 x_0 处连续，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 从而，当 $P(x,y)\in U(P_0,\delta)$ 时，$|x-x_0|\leqslant\rho(P,P_0)<\delta$，因而有

$$|F(x,y)-F(x_0,y_0)|=|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

即 $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

习题9-2 偏导数

1. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=x^3y-y^3x$； (2) $s=\dfrac{u^2+v^2}{uv}$；

(3) $z=\sqrt{\ln(xy)}$； (4) $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$；

(5) $z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$； (6) $z=(1+xy)^y$；

(7) $u=x^{\frac{y}{z}}$； (8) $u=\arctan(x-y)^z$.

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3-3y^2x$.

(2) $$\frac{\partial s}{\partial u}=\frac{\frac{\partial}{\partial u}(u^2+v^2)\cdot uv-(u^2+v^2)\cdot\frac{\partial}{\partial u}(uv)}{(uv)^2}$$

$$=\frac{2u^2v-(u^2+v^2)v}{u^2v^2}$$

$$=\frac{1}{v}-\frac{v}{u^2},$$

$$\frac{\partial s}{\partial v}=\frac{\frac{\partial}{\partial v}(u^2+v^2)\cdot uv-(u^2+v^2)\cdot\frac{\partial}{\partial v}(uv)}{(uv)^2}$$

$$=\frac{2uv^2-(u^2+v^2)u}{u^2v^2}$$

$$=\frac{1}{u}-\frac{u}{v^2}.$$

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln(xy)}}\cdot\frac{1}{xy}\cdot y=\frac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln(xy)}}\cdot\frac{1}{xy}\cdot x=\frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}$.

(4) $\frac{\partial z}{\partial x}=y\cos(xy)+2\cos(xy)\cdot[-\sin(xy)]\cdot y$

$=y[\cos(xy)-\sin(2xy)]$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos(xy)+2\cos(xy)\cdot[-\sin(xy)]\cdot x$

$=x[\cos(xy)-\sin(2xy)]$.

(5) $\frac{\partial z}{\partial x}=\cot\frac{x}{y}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{y}\csc\frac{2x}{y}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\cot\frac{x}{y}\cdot\sec^2\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{2x}{y^2}\csc\frac{2x}{y}$.

(6) $\frac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[e^{y\ln(1+xy)}]=(1+xy)^y[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}]$.

(7) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x,\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$.

(8) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$,

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$,

$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$.

2. 设 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，求证 $l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=0$.

证　因为 $$\frac{\partial T}{\partial l}=2\pi\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{l}{g}}}\cdot\frac{1}{g}=\frac{\pi}{\sqrt{gl}},$$

$$\frac{\partial T}{\partial g}=2\pi\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{l}{g}}}\cdot\left(-\frac{l}{g^2}\right)=-\frac{\pi\sqrt{l}}{g\sqrt{g}},$$

所以 $$l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}-\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=0.$$

3. 设 $z=e^{-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}$，求证 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2z$.

证 因为 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x^2}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y^2}e^{-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)},$$

所以 $$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2e^{-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}=2z.$$

4. 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$.

解 $$f_x(x,y)=1+\frac{y-1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{y},$$

$$f_x(x,1)=1.$$

5. 曲线 $\begin{cases}z=\frac{x^2+y^2}{4},\\ y=4\end{cases}$ 在点(2,4,5)处的切线对于 x 轴的倾角是多少？

解 设 $z=f(x,y)$. 按偏导数的几何意义，$f_x(2,4)$ 就是曲线在点(2,4,5)处的切线对于 x 轴的斜率，而 $f_x(2,4)=\frac{1}{2}x\big|_{x=2}=1$，即 $k=\tan\alpha=1$，于是倾角 $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

6. 求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$：

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$；

(2) $z=\arctan\frac{y}{x}$；

(3) $z=y^x$.

解 (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^2$, $\quad\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=4y^3-8x^2y$, $\quad\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-8x^2$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(4x^3-8xy^2)=-16xy.$$

(2) $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\cdot\ln^2 y,$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y^x\ln y)=y^{x-1}(1+x\ln y).$$

7. 设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，求 $f_{xx}(0,0,1),f_{xz}(1,0,2),f_{yz}(0,-1,0)$ 及 $f_{zzx}(2,0,1)$.

解　因为 $f_x=y^2+2xz,f_{xx}=2z,f_{xz}=2x,$

$$f_y=2xy+z^2,f_{yz}=2z,$$

$$f_z=2yz+x^2,f_{zz}=2y,f_{zzx}=0,$$

所以 $f_{xx}(0,0,1)=2,f_{xz}(1,0,2)=2,f_{yz}(0,-1,0)=0,f_{zzx}(2,0,1)=0.$

8. 设 $z=x\ln(xy)$，求$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$及$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy)+x\cdot\frac{y}{xy}=\ln(xy)+1,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y}{xy}=\frac{1}{x},\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x}{xy}=\frac{1}{y},\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=-\frac{1}{y^2}.$$

9. 验证：

(1) $y=e^{-kn^2t}\sin nx$ 满足$\frac{\partial y}{\partial t}=k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$;

(2) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r}$.

证　(1) 因为 $\frac{\partial y}{\partial t}=-kn^2e^{-kn^2t}\sin nx,\frac{\partial y}{\partial x}=ne^{-kn^2t}\cos nx,$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(ne^{-kn^2t}\cos nx)=-n^2e^{-kn^2t}\sin nx,$$

所以
$$\frac{\partial y}{\partial t}=k(-n^2e^{-kn^2t}\sin nx)=k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

(2) 因为 $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r},$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{1}{r}-\frac{x}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=\frac{r^2-x^2}{r^3},$$

由函数关于自变量的对称性，得

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{r^2-y^2}{r^3},\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-z^2}{r^3},$$

所以
$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}+\frac{r^2-z^2}{r^3}=\frac{2}{r}.$$

习题9-3 全微分

1. 求下列函数的全微分：

(1) $z=xy+\dfrac{x}{y}$；　　(2) $z=e^{\frac{y}{x}}$；

(3) $z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　　(4) $u=x^{yz}$.

解 (1) 因为
$$\frac{\partial z}{\partial x}=y+\frac{1}{y},\frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2},$$

所以
$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(y+\frac{1}{y}\right)dx+\left(x-\frac{x}{y^2}\right)dy.$$

(2) 因为
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}},$$

所以
$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{y}{x}}(ydx-xdy).$$

(3) 因为
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y\cdot\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

所以
$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}(ydx-xdy).$$

(4) 因为
$$\frac{\partial u}{\partial x}=yzx^{yz-1},\frac{\partial u}{\partial y}=zx^{yz}\ln x,\frac{\partial u}{\partial z}=yx^{yz}\ln x,$$

所以 $du=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy+\dfrac{\partial u}{\partial z}dz=yzx^{yz-1}dx+zx^{yz}\ln x dy+yx^{yz}\ln x dz.$

2. 求函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$ 当 $x=1,y=2$ 时的全微分.

解 因为
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{1+x^2+y^2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{1+x^2+y^2},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{1}{3},\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{2}{3},$$

所以 $$\mathrm{d}z\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{1}{3}\mathrm{d}x+\frac{2}{3}\mathrm{d}y.$$

3. 求函数 $z=\dfrac{y}{x}$ 当 $x=2,y=1,\Delta x=0.1,\Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

解 $\Delta z=\dfrac{y+\Delta y}{x+\Delta x}-\dfrac{y}{x},\mathrm{d}z=-\dfrac{y}{x^2}\Delta x+\dfrac{1}{x}\Delta y.$

当 $x=2,y=1,\Delta x=0.1,\Delta y=-0.2$ 时,

全增量 $$\Delta z=\frac{1+(-0.2)}{2+0.1}-\frac{1}{2}=-0.119,$$

全微分 $$\mathrm{d}z=-\frac{1}{4}\cdot 0.1+\frac{1}{2}\cdot(-0.2)=-0.125.$$

4. 求函数 $z=\mathrm{e}^{xy}$ 当 $x=1,y=1,\Delta x=0.15,\Delta y=0.1$ 时的全微分.

解 $$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=y\mathrm{e}^{xy}\Delta x+x\mathrm{e}^{xy}\Delta y.$$

当 $x=1,y=1,\Delta x=0.15,\Delta y=0.1$ 时,全微分
$$\mathrm{d}z=\mathrm{e}\cdot 0.15+\mathrm{e}\cdot 0.1=0.25\mathrm{e}.$$

5. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面四条性质:

(1) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续.

(2) $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续.

(3) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微分.

(4) $f_x(x_0,y_0)$、$f_y(x_0,y_0)$ 存在.

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q,则下列四个选项中正确的是(　　).

(A) (2)⇒(3)⇒(1).　　(B) (3)⇒(2)⇒(1).

(C) (3)⇒(4)⇒(1).　　(D) (3)⇒(1)⇒(4).

解 由于二元函数偏导数存在且连续是二元函数可微分的充分条件,二元函数可微分必定可(偏)导,二元函数可微分必定连续,因此选项(A)正确.

选项(B)中(3)$\nRightarrow$(2),选项 (C)中(4)$\nRightarrow$(1),选项(D)中(1)$\nRightarrow$(4).

*6. 计算 $\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}$ 的近似值.

解 设 $z=\sqrt{x^3+y^3}$,则
$$\begin{aligned}\sqrt{(x+\Delta x)^3+(y+\Delta y)^3}&=\sqrt{x^3+y^3}+\Delta z\approx\sqrt{x^3+y^3}+\mathrm{d}z\\&=\sqrt{x^3+y^3}+\frac{3x^2\Delta x+3y^2\Delta y}{2\sqrt{x^3+y^3}}.\end{aligned}$$

取 $x=1,y=2,\Delta x=0.02,\Delta y=-0.03$, 可得

$$\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}\approx\sqrt{1+2^3}+\frac{3\cdot 1\cdot 0.02+3\cdot 2^2\cdot(-0.03)}{2\sqrt{1+2^3}}=2.95.$$

*7. 计算$(1.97)^{1.05}$的近似值($\ln 2=0.693$).

解 设$z=x^y$，则

$$(x+\Delta x)^{y+\Delta y}=x^y+\Delta z\approx x^y+\mathrm{d}z=x^y+yx^{y-1}\Delta x+x^y\ln x\cdot\Delta y.$$

取$x=2,y=1,\Delta x=-0.03,\Delta y=0.05$,可得

$$(1.97)^{1.05}\approx 2-0.03+2\ln 2\cdot 0.05=1.97+0.0693\approx 2.039.$$

*8. 已知边长为$x=6\,\mathrm{m}$与$y=8\,\mathrm{m}$的矩形,如果x边增加5 cm而y边减少10 cm,问这个矩形的对角线的近似变化怎样?

解 矩形的对角线的长为$z=\sqrt{x^2+y^2}$，

$$\Delta z\approx\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\Delta x+y\Delta y).$$

当$x=6,y=8,\Delta x=0.05,\Delta y=-0.1$时，

$$\Delta z\approx\frac{1}{\sqrt{6^2+8^2}}(6\cdot 0.05-8\cdot 0.1)=-0.05,$$

即,这个矩形的对角线的长减少大约5 cm.

*9. 设有一无盖圆柱形容器,容器的壁与底的厚度均为0.1 cm,内高为20 cm,内半径为4 cm.求容器外壳体积的近似值.

解 圆柱体的体积公式为$V=\pi R^2H$，圆柱形容器的外壳体积就是圆柱体体积V的增量ΔV，而

$$\Delta V\approx\mathrm{d}V=\frac{\partial V}{\partial R}\Delta R+\frac{\partial V}{\partial H}\Delta H=2\pi RH\Delta R+\pi R^2\Delta H.$$

当$R=4,H=20,\Delta R=\Delta H=0.1$时，

$$\Delta V\approx 2\cdot 3.14\cdot 4\cdot 20\cdot 0.1+3.14\cdot 4^2\cdot 0.1\approx 55.3,$$

即容器外壳的体积大约是$55.3\,\mathrm{cm}^3$.

*10. 设有直角三角形,测得其两直角边的长分别为7 ± 0.1 cm和24 ± 0.1 cm.试求利用上述二值来计算斜边长度时的绝对误差.

解 设两直角边长度分别为x和y，则斜边长度为$z=\sqrt{x^2+y^2}$.

$$|\Delta z|\approx|\mathrm{d}z|=\left|\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right|\leqslant\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right||\Delta x|+\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right||\Delta y|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x|\Delta x|+y|\Delta y|)\leqslant\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\delta_x+y\delta_y),$$

便得

$$\delta_z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\delta_x+y\delta_y).$$

当 $x=7, y=24, \delta_x=0.1, \delta_y=0.1$ 时，

$$\delta_z=\frac{1}{\sqrt{7^2+24^2}}(7\cdot 0.1+24\cdot 0.1)=0.124.$$

即计算斜边长度 z 的绝对误差约为 0.124 cm.

*11. 测得一块三角形土地的两边边长分别为 63 ± 0.1 m 和 78 ± 0.1 m，这两边的夹角为 $60°\pm 1°$. 试求三角形面积的近似值，并求其绝对误差和相对误差.

解 设三角形的两边长分别为 a 和 b，它们的夹角为 θ，则三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta,$$

$$\begin{aligned}|\Delta S|\approx|\mathrm{d}S|&=\left|\frac{\partial S}{\partial a}\Delta a+\frac{\partial S}{\partial b}\Delta b+\frac{\partial S}{\partial\theta}\Delta\theta\right|\\&\leqslant\left|\frac{\partial S}{\partial a}\right||\Delta a|+\left|\frac{\partial S}{\partial b}\right||\Delta b|+\left|\frac{\partial S}{\partial\theta}\right||\Delta\theta|\\&=\frac{1}{2}b\sin\theta|\Delta a|+\frac{1}{2}a\sin\theta|\Delta b|+\frac{1}{2}ab\cos\theta|\Delta\theta|\\&\leqslant\frac{1}{2}b\sin\theta\delta_a+\frac{1}{2}a\sin\theta\delta_b+\frac{1}{2}ab\cos\theta\delta_\theta,\end{aligned}$$

便得

$$\delta_S=\frac{1}{2}b\sin\theta\delta_a+\frac{1}{2}a\sin\theta\delta_b+\frac{1}{2}ab\cos\theta\delta_\theta.$$

当 $a=63, b=78, \theta=\frac{\pi}{3}, \delta_a=0.1, \delta_b=0.1, \delta_\theta=\frac{\pi}{180}$ 时，三角形面积的近似值为

$$S=\frac{1}{2}\cdot 63\cdot 78\cdot\sin\frac{\pi}{3}=2\,127.8(\mathrm{m}^2),$$

绝对误差为

$$\begin{aligned}\delta_S&=\frac{1}{2}\cdot 78\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0.1+\frac{1}{2}\cdot 63\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0.1+\frac{1}{2}\cdot 63\cdot 78\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{180}\\&=27.6(\mathrm{m}^2),\end{aligned}$$

相对误差为

$$\frac{\delta_S}{S}=\frac{27.6}{2\,127.8}=1.30\%.$$

*12. 利用全微分证明：两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和.

解 设 $u=x+y$，则

$$\begin{aligned}|\Delta u|\approx|\mathrm{d}u|&=\left|\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right|\\&=|\Delta x+\Delta y|\leqslant|\Delta x|+|\Delta y|\leqslant\delta_x+\delta_y,\end{aligned}$$

便得

$$\delta_u=\delta_x+\delta_y,$$

即两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和.

*13. 利用全微分证明:乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和;商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

解 设 $u=xy, v=\dfrac{x}{y}$, 则

$$|\Delta u|\approx|\mathrm{d}u|=|y\Delta x+x\Delta y|\leqslant|y||\Delta x|+|x||\Delta y|\leqslant|y|\delta_x+|x|\delta_y,$$

$$|\Delta v|\approx|\mathrm{d}v|=\left|\frac{y\Delta x-x\Delta y}{y^2}\right|\leqslant\frac{|y||\Delta x|+|x||\Delta y|}{|y|^2}\leqslant\frac{|y|\delta_x+|x|\delta_y}{|y|^2},$$

便得

$$\delta_u=|y|\delta_x+|x|\delta_y,\qquad \delta_v=\frac{|y|\delta_x+|x|\delta_y}{|y|^2},$$

$$\frac{\delta_u}{|u|}=\frac{|y|\delta_x+|x|\delta_y}{|xy|}=\frac{\delta_x}{|x|}+\frac{\delta_y}{|y|},$$

$$\frac{\delta_v}{|v|}=\frac{1}{\left|\dfrac{x}{y}\right|}\cdot\frac{|y|\delta_x+|x|\delta_y}{|y|^2}=\frac{\delta_x}{|x|}+\frac{\delta_y}{|y|}.$$

即乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和,商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

习题9-4 多元复合函数的求导法则

1. 设 $z=u^2+v^2$,而 $u=x+y, v=x-y$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2u\cdot1+2v\cdot1=2(u+v)=4x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=2u\cdot1+2v\cdot(-1)=2(u-v)=4y.$$

2. 设 $z=u^2\ln v$,而 $u=\dfrac{x}{y}, v=3x-2y$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2u\ln v\cdot\frac{1}{y}+\frac{u^2}{v}\cdot3$$

$$=\frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)+\frac{3x^2}{(3x-2y)y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=2u\ln v\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\frac{u^2}{v}\cdot(-2)$$

$$=-\frac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y)-\frac{2x^2}{(3x-2y)y^2}.$$

3\. 设 $z=\mathrm{e}^{x-2y}$，而 $x=\sin t, y=t^3$，求$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

解 $$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{x-2y}\cdot\cos t+\mathrm{e}^{x-2y}\cdot(-2)\cdot 3t^2$$
$$=\mathrm{e}^{x-2y}(\cos t-6t^2)=\mathrm{e}^{\sin t-2t^3}(\cos t-6t^2).$$

4\. 设 $z=\arcsin(x-y)$，而 $x=3t, y=4t^3$，求$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

解 $$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\cdot 3+\frac{(-1)}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\cdot 12t^2$$
$$=\frac{3(1-4t^2)}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}.$$

5\. 设 $z=\arctan(xy)$，而 $y=\mathrm{e}^x$，求$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解 $$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{1+x^2y^2}+\frac{x}{1+x^2y^2}\cdot\mathrm{e}^x$$
$$=\frac{(1+x)\mathrm{e}^x}{1+x^2\mathrm{e}^{2x}}.$$

6\. 设 $u=\frac{\mathrm{e}^{ax}(y-z)}{a^2+1}$，而 $y=a\sin x, z=\cos x$，求$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$
$$=\frac{a\mathrm{e}^{ax}(y-z)}{a^2+1}+\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+1}\cdot a\cos x+\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+1}\cdot(-1)\cdot(-\sin x)$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+1}(a^2\sin x-a\cos x+a\cos x+\sin x)$$
$$=\mathrm{e}^{ax}\sin x.$$

7\. 设 $z=\arctan\frac{x}{y}$，而 $x=u+v, y=u-v$，验证
$$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}.$$

证 $$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)$$
$$=\frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot 1+\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot 1+\frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot 1$$

$$+\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot(-1)$$

$$=\frac{2y}{x^2+y^2}=\frac{u-v}{u^2+v^2},$$

故等式成立.

8. 求下列函数的一阶偏导数(其中 f 具有一阶连续偏导数):

(1) $u=f(x^2-y^2,\mathrm{e}^{xy})$;　　(2) $u=f\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)$;

(3) $u=f(x,xy,xyz)$.

解　(1) 将中间变量 x^2-y^2,e^{xy} 依次编为 1,2 号,则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2)+f_2'\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^{xy})=2xf_1'+y\mathrm{e}^{xy}f_2',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2)+f_2'\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{e}^{xy})=-2yf_1'+x\mathrm{e}^{xy}f_2'.$$

(2) 令 $s=\frac{x}{y},t=\frac{y}{z}$,则 $u=f(s,t)$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{1}{y}f_s',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_s'+\frac{1}{z}f_t',$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}f_t'.$$

(3) 将中间变量 x,xy,xyz 依次编为 1,2,3 号,则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot y+f_3'\cdot yz=f_1'+yf_2'+yzf_3',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_2'\cdot x+f_3'\cdot xz=xf_2'+xzf_3',$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=f_3'\cdot xy=xyf_3'.$$

9. 设 $z=xy+xF(u)$,而 $u=\frac{y}{x}$,$F(u)$ 为可导函数,证明

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy.$$

证　$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\left[y+F(u)+xF'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+y\left[x+xF'(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

$$=x\left[y+F(u)-\frac{y}{x}F'(u)\right]+y[x+F'(u)]$$

$$= xy + xF(u) + xy = z + xy,$$

故等式成立.

10. 设 $z = \dfrac{y}{f(x^2 - y^2)}$，其中 $f(u)$ 为可导函数，验证

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

证 $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y \cdot f_u' \cdot 2x}{f^2(u)} = -\frac{2xyf_u'}{f^2(u)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f(u) - yf_u' \cdot (-2y)}{f^2(u)} = \frac{1}{f(u)} + \frac{2y^2 f_u'}{f^2(u)},$$

故 $$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2yf_u'}{f^2(u)} + \frac{1}{yf(u)} + \frac{2yf_u'}{f^2(u)} = \frac{1}{yf(u)}$$

$$= \frac{z}{y^2}.$$

11. 设 $z = f(x^2 + y^2)$，其中 f 具有二阶导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解 令 $u = x^2 + y^2$，则 $z = f(u)$. 记 $f' = f'(u), f'' = f''(u)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 2xf',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial y} = 2yf',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f' + 2xf'' \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 2f' + 4x^2 f'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2xf'' \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 4xyf'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2f' + 2yf'' \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 2f' + 4y^2 f''.$$

*12. 求下列函数的 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$（其中 f 具有二阶连续偏导数）：

(1) $z = f(xy, y)$；　　(2) $z = f\left(x, \dfrac{x}{y}\right)$；

(3) $z = f(xy^2, x^2 y)$；　　(4) $z = f(\sin x, \cos y, e^{x+y})$.

解 (1) 令 $s = xy, t = y$，则 $z = f(s,t)$，s 和 t 是中间变量. 将 s,t 依次编为 1,2 号，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = yf_1', \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f_1' \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + f_2' \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = xf_1' + f_2'.$$

因为 $f(s,t)$ 是 s 和 t 的函数，所以 f_1' 和 f_2' 也是 s 和 t 的函数，从而 f_1' 和 f_2' 是以 s 和 t 为中间变量的 x 和 y 的函数. 故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(yf_1')=yf_{11}''\cdot\frac{\partial s}{\partial x}=y^2f_{11}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(yf_1')=f_1'+y\left(f_{11}''\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+f_{12}''\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}\right).$$

$$=f_1'+xyf_{11}''+yf_{12}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(xf_1'+f_2')$$

$$=x\left(f_{11}''\frac{\partial s}{\partial y}+f_{12}''\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}\right)+f_{21}''\frac{\partial s}{\partial y}+f_{22}''\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}$$

$$=x^2f_{11}''+2xf_{12}''+f_{22}''.$$

(2) 令 $s=x,t=\dfrac{x}{y}$,并将 s,t 依次编为 1,2 号,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}+f_2'\frac{\partial t}{\partial x}=f_1'+\frac{1}{y}f_2',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_2'\frac{\partial t}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_2'.$$

因为 $f(s,t)$ 是 s 和 t 的函数,所以 f_1' 和 f_2' 也是 s 和 t 的函数,从而 f_1' 和 f_2' 是以 s 和 t 为中间变量的 x 和 y 的函数. 故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(f_1'+\frac{1}{y}f_2'\right)=f_{11}''+f_{12}''\cdot\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{1}{y}\left(f_{21}''+f_{22}''\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right)$$

$$=f_{11}''+\frac{2}{y}f_{12}''+\frac{1}{y^2}f_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(f_1'+\frac{1}{y}f_2'\right)=f_{12}''\cdot\frac{\partial t}{\partial y}-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}f_{22}''\frac{\partial t}{\partial y}$$

$$=-\frac{x}{y^2}f_{12}''-\frac{1}{y^2}f'_2-\frac{x}{y^3}f_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{y^2}f_2'\right)=\frac{2x}{y^3}f_2'-\frac{x}{y^2}f_{22}''\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{2x}{y^3}f_2'+\frac{x^2}{y^4}f_{22}''.$$

(3) 令 $s=xy^2,t=x^2y$,并将 s,t 依次编为 1,2 号,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\frac{\partial s}{\partial x}+f_2'\frac{\partial t}{\partial x}=y^2f_1'+2xyf_2',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\frac{\partial s}{\partial y}+f_2'\frac{\partial t}{\partial y}=2xyf_1'+x^2f_2'.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(y^2f_1'+2xyf_2')$$

$$=y^2\left(f_{11}''\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+f_{12}''\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right)+2yf_2'+2xy\left(f_{21}''\frac{\partial s}{\partial x}+f_{22}''\frac{\partial t}{\partial x}\right)$$

$$=y^2(y^2f_{11}''+2xyf_{12}'')+2yf_2'+2xy(y^2f_{21}''+2xyf_{22}'')$$

$$=2yf_2'+y^4f_{11}''+4xy^3f_{12}''+4x^2y^2f_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(y^2 f_1'+2xyf_2')$$

$$=2yf_1'+y^2\left(f_{11}''\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+f_{12}''\cdot\frac{\partial t}{\partial y}\right)$$

$$+2xf_2'+2xy\left(f_{21}''\frac{\partial s}{\partial y}+f_{22}''\frac{\partial t}{\partial y}\right)$$

$$=2yf_1'+y^2(2xyf_{11}''+x^2 f_{12}'')+2xf_2'$$

$$+2xy(2xyf_{21}''+x^2 f_{22}'')$$

$$=2yf_1'+2xf_2'+2xy^3 f_{11}''+5x^2y^2 f_{12}''+2x^3yf_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(2xyf_1'+x^2 f_2')$$

$$=2xf_1'+2xy\left(f_{11}''\frac{\partial s}{\partial y}+f_{12}''\frac{\partial t}{\partial y}\right)+x^2\left(f_{21}''\frac{\partial s}{\partial y}+f_{22}''\frac{\partial t}{\partial y}\right)$$

$$=2xf_1'+2xy(2xyf_{11}''+x^2 f_{12}'')+x^2(2xyf_{21}''+x^2 f_{22}'')$$

$$=2xf_1'+4x^2y^2 f_{11}''+4x^3yf_{12}''+x^4 f_{22}''.$$

(4) 令 $u=\sin x, v=\cos y, w=\mathrm{e}^{x+y}$，并将 u,v,w 依次编为 1,2,3 号，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+f_3'\frac{\partial w}{\partial x}=\cos xf_1'+\mathrm{e}^{x+y}f_3',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_2'\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}+f_3'\frac{\partial w}{\partial y}=-\sin yf_2'+\mathrm{e}^{x+y}f_3',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(\cos xf_1'+\mathrm{e}^{x+y}f_3')$$

$$=-\sin xf_1'+\cos x\left(f_{11}''\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+f_{13}''\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\mathrm{e}^{x+y}f_3'+\mathrm{e}^{x+y}\left(f_{31}''\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+f_{33}''\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$=-\sin xf_1'+\cos x(\cos xf_{11}''+\mathrm{e}^{x+y}f_{13}'')+\mathrm{e}^{x-y}f_3'+\mathrm{e}^{x+y}(\cos xf_{31}''+\mathrm{e}^{x+y}f_{33}'')$$

$$=\mathrm{e}^{x+y}f_3'-\sin xf_1'+\cos^2 xf_{11}''+2\mathrm{e}^{x+y}\cos xf_{13}''+\mathrm{e}^{2(x-y)}f_{33}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(\cos xf_1'+\mathrm{e}^{x+y}f_3')$$

$$=\cos x\left(f_{12}''\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}+f_{13}''\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\mathrm{e}^{x+y}f_3'+\mathrm{e}^{x+y}\left(f_{32}''\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}+f_{33}''\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$=\cos x(-\sin yf_{12}''+\mathrm{e}^{x+y}f_{13}'')+\mathrm{e}^{x+y}f_3'+\mathrm{e}^{x-y}(-\sin yf_{32}''+\mathrm{e}^{x+y}f_{33}'')$$

$$=\mathrm{e}^{x+y}f_3'-\cos x\sin yf_{12}''+\mathrm{e}^{x+y}\cos xf_{13}''-\mathrm{e}^{x+y}\sin yf_{32}''+\mathrm{e}^{2(x+y)}f_{33}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(-\sin yf_2'+\mathrm{e}^{x+y}f_3')$$

$$=-\cos yf_2'-\sin y\left(f_{22}''\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}+f_{23}''\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\mathrm{e}^{x+y}f_3'+\mathrm{e}^{x+y}\left(f_{32}''\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}+f_{33}''\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$=-\cos yf_2'-\sin y(-\sin yf_{22}''+\mathrm{e}^{x-y}f_{23}'')+\mathrm{e}^{x+y}f_3'+\mathrm{e}^{x-y}(-\sin yf_{32}''+\mathrm{e}^{x+y}f_{33}'')$$

$$=\mathrm{e}^{x+y}f_3'-\cos yf_2'+\sin^2 yf_{22}''-2\mathrm{e}^{x+y}\sin yf_{23}''+\mathrm{e}^{2(x-y)}f_{33}''.$$

*13. 设 $u=f(x,y)$ 的所有二阶偏导数连续，而

$$x=\frac{s-\sqrt{3}t}{2},y=\frac{\sqrt{3}s+t}{2},$$

证明

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$$

及

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

证 因为 $\dfrac{\partial u}{\partial s}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\partial u}{\partial y}$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y},$$

所以
$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$
$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

又因为
$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$=\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

习题9-5 隐函数的求导公式

1. 设 $\sin y+e^x-xy^2=0$,求$\dfrac{dy}{dx}$.

解 设 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$,则

$$F_x=e^x-y^2, F_y=\cos y-2xy.$$

当 $F_y\neq 0$ 时,有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{e^x-y^2}{\cos y-2xy}=\frac{y^2-e^x}{\cos y-2xy}.$$

2. 设 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$,求$\dfrac{dy}{dx}$.

解 设 $F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\dfrac{y}{x}$,则一阶偏导数分别为

$$F_x=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{x+y}{x^2+y^2},$$

$$F_y=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{y-x}{x^2+y^2}.$$

当 $F_y\neq 0$ 时,有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{x+y}{x^2+y^2}\Big/\frac{y-x}{x^2+y^2}=\frac{x+y}{x-y}.$$

3. 设 $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$及$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解法一 设 $F(x,y,z)=x+2y+z-2\sqrt{xyz}$,则

$$F_x=1-\frac{yz}{\sqrt{xyz}}, F_y=2-\frac{xz}{\sqrt{xyz}}, F_z=1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}}.$$

于是当 $F_z\neq 0$ 时,有$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}.$$

解法二 在所给方程两端分别对 x 求偏导数，并注意 $z=z(x,y)$，得

$$1+\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{\sqrt{xyz}}\left(yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,$$

当 $1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}}\neq 0$ 时，解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{yz}{\sqrt{xyz}}-1}{1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}}}=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}$.

同理，方程两端分别对 y 求偏导数，得

$$2+\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{1}{\sqrt{xyz}}\left(xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0,$$

当 $1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}}\neq 0$ 时，解得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{xz}{\sqrt{xyz}}-2}{1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}}}=\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}$.

解法三 对所给方程两端分别求全微分，得

$$\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+\mathrm{d}z-\frac{1}{\sqrt{xyz}}(yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z)=0,$$

即
$$\left(1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}}\right)\mathrm{d}z=\left(\frac{yz}{\sqrt{xyz}}-1\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{xz}{\sqrt{xyz}}-2\right)\mathrm{d}y.$$

当 $\sqrt{xyz}-xy\neq 0$ 时，解得 $\mathrm{d}z=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}\mathrm{d}x+\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}\mathrm{d}y$.

所以
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}.$$

4. 设 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 令 $F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}$，则

$$F_x=\frac{1}{z},F_y=-\frac{1}{\frac{z}{y}}\cdot\left(-\frac{z}{y^2}\right)=\frac{1}{y},$$

$$F_z=-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{\frac{z}{y}}\cdot\frac{1}{y}=-\frac{x+z}{z^2}.$$

于是当 $F_z\neq 0$ 时，有
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{1}{z}\Big/\left(-\frac{x+z}{z^2}\right)=\frac{z}{x+z},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{1}{y}\Big/\left(-\frac{x+z}{z^2}\right)=\frac{z^2}{y(x+z)}.$$

5. 设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，证明 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

证 设 $F(x,y,z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$,则

$$F_x = 2\cos(x+2y-3z)-1,$$

$$F_y = 2\cos(x+2y-3z)\cdot 2-2 = 2F_x,$$

$$F_z = 2\cos(x+2y-3z)\cdot(-3)+3 = -3F_x,$$

故当 $F_z\neq 0$ 时,有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_x}{F_z}-\dfrac{F_y}{F_z}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}=1.$

6. 设 $x=x(y,z)$,$y=y(x,z)$,$z=z(x,y)$都是由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的具有连续偏导数的函数,证明:$\dfrac{\partial x}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1.$

证 因为 $$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_x},\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{F_z}{F_y},\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},$$

所以 $$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{F_y}{F_x}\right)\cdot\left(-\frac{F_z}{F_y}\right)\cdot\left(-\frac{F_x}{F_z}\right)=-1.$$

7. 设 $\Phi(u,v)$具有连续偏导数,证明由方程 $\Phi(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$满足 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=c.$

证 令 $u=cx-az$,$v=cy-bz$,则

$$\Phi_x=\Phi_u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=c\Phi_u,$$

$$\Phi_y=\Phi_v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=c\Phi_v,$$

$$\Phi_z=\Phi_u\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\Phi_v\cdot\frac{\partial v}{\partial z}=-a\Phi_u-b\Phi_v.$$

故当 $\Phi_z\neq 0$ 时,有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{\Phi_x}{\Phi_z}=\dfrac{c\Phi_u}{a\Phi_u+b\Phi_v},$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\Phi_y}{\Phi_z}=\frac{c\Phi_v}{a\Phi_u+b\Phi_v}.$$

于是 $$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=a\cdot\frac{c\Phi_u}{a\Phi_u+b\Phi_v}+b\cdot\frac{c\Phi_v}{a\Phi_u+b\Phi_v}=c.$$

*8. 设 $e^z-xyz=0$,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 设 $F(x,y,z)=e^z-xyz$,则 $F_x=-yz$,$F_z=e^z-xy$.

于是当 $F_z\neq 0$ 时,有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{yz}{e^z-xy},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{y\dfrac{\partial z}{\partial x}(e^z-xy)-yz\left(e^z\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\right)}{(e^z-xy)^2}$$

$$=\frac{y^2z-yz\left(e^z\cdot\dfrac{yz}{e^z-xy}-y\right)}{(e^z-xy)^2}$$

$$=\frac{2y^2ze^z-2xy^3z-y^2z^2e^z}{(e^z-xy)^3}.$$

*9. 设 $z^3-3xyz=a^3$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 设 $F(x,y,z)=z^3-3xyz-a^3$，则

$$F_x=-3yz, F_y=-3xz, F_z=3z^2-3xy.$$

于是当 $F_z\neq0$ 时，有 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{z^2-xy}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz}{z^2-xy}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{yz}{z^2-xy}\right)$$

$$=\frac{\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)(z^2-xy)-yz\left(2z\frac{\partial z}{\partial y}-x\right)}{(z^2-xy)^2}$$

$$=\frac{\left(z+\frac{xyz}{z^2-xy}\right)\cdot(z^2-xy)-yz\left(\frac{2xz^2}{z^2-xy}-x\right)}{(z^2-xy)^2}$$

$$=\frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}.$$

10. 求由下列方程组所确定的函数的导数或偏导数：

(1) 设 $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\x^2+2y^2+3z^2=20,\end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}$;

(2) 设 $\begin{cases}x+y+z=0,\\x^2+y^2+z^2=1,\end{cases}$ 求 $\frac{dx}{dz},\frac{dy}{dz}$;

(3) 设 $\begin{cases}u=f(ux,v+y),\\v=g(u-x,v^2y),\end{cases}$ 其中 f,g 具有一阶连续偏导数，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$;

(4) 设 $\begin{cases}x=e^u+u\sin v,\\y=e^u-u\cos v,\end{cases}$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

解 (1) 分别在两个方程两端对 x 求导，得

$$\begin{cases}\frac{dz}{dx}=2x+2y\frac{dy}{dx},\\2x+4y\frac{dy}{dx}+6z\frac{dz}{dx}=0.\end{cases}$$

移项，得

$$\begin{cases}2y\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{dz}{dx}=-2x,\\2y\frac{dy}{dx}+3z\frac{dz}{dx}=-x.\end{cases}$$

当 $D=\begin{vmatrix} 2y & -1 \\ 2y & 3z \end{vmatrix}=6yz+2y\neq 0$ 时，解方程组得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\begin{vmatrix} -2x & -1 \\ -x & 3z \end{vmatrix}}{D}=\frac{-6xz-x}{6yz+2y}=\frac{-x(6z+1)}{2y(3z+1)},$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\begin{vmatrix} 2y & -2x \\ 2y & -x \end{vmatrix}}{D}=\frac{2xy}{6yz+2y}=\frac{x}{3z+1}.$$

(2) 所给方程组确定两个一元隐函数：$x=x(z)$ 和 $y=y(z)$，将所给方程的两端分别对 z 求导并移项，得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=-1, \\ 2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=-2z. \end{cases}$$

当 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix}=2(y-x)\neq 0$ 时，解方程组得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2z & 2y \end{vmatrix}}{D}=\frac{-2y+2z}{2(y-x)}=\frac{y-z}{x-y},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2x & -2z \end{vmatrix}}{D}=\frac{-2z+2x}{2(y-x)}=\frac{z-x}{x-y}.$$

(3) 此方程组可以确定两个二元隐函数：$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$.

分别在方程两端对 x 求偏导数，得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=f'_1\cdot\left(u+x\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+f'_2\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=g'_1\cdot\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-1\right)+2g'_2yv\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

移项整理后得

$$\begin{cases} (xf'_1-1)\dfrac{\partial u}{\partial x}+f'_2\dfrac{\partial v}{\partial x}=-uf'_1, \\ g'_1\dfrac{\partial u}{\partial x}+(2yvg'_2-1)\dfrac{\partial v}{\partial x}=g'_1. \end{cases}$$

当 $D=\begin{vmatrix} xf'_1-1 & f'_2 \\ g'_1 & 2yvg'_2-1 \end{vmatrix}=(xf'_1-1)(2yvg'_2-1)-f'_2g'_1\neq 0$ 时，解方程组得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} -uf'_1 & f'_2 \\ g'_1 & 2yvg'_2-1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-uf'_1(2yvg'_2-1)-f'_2g'_1}{(xf'_1-1)(2yvg'_2-1)-f'_2g'_1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} xf'_1-1 & -uf'_1 \\ g'_1 & g'_1 \end{vmatrix} = \frac{g'_1(xf'_1+uf'_1-1)}{(xf'_1-1)(2yvg'_2-1)-f'_2g'_1}.$$

(4) 此方程组确定两个二元隐函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$是已知函数的反函数，令

$$F(x,y,u,v) = x-\mathrm{e}^u - u\sin v,$$
$$G(x,y,u,v) = y-\mathrm{e}^u + u\cos v.$$

则 $F_x=1, F_y=0, F_u=-\mathrm{e}^u-\sin v, F_v=-u\cos v,$

$G_x=0, G_y=1, G_u=-\mathrm{e}^u+\cos v, G_v=-u\sin v.$

当 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} -\mathrm{e}^u-\sin v & -u\cos v \\ -\mathrm{e}^u+\cos v & -u\sin v \end{vmatrix}=u\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+u\neq 0$

时，由隐函数求导公式得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix} 1 & -u\cos v \\ 0 & -u\sin v \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\sin v}{\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix} 0 & -u\cos v \\ 1 & -u\sin v \end{vmatrix}$$

$$=\frac{-\cos v}{\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix} -\mathrm{e}^u-\sin v & 1 \\ -\mathrm{e}^u+\cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\cos v-\mathrm{e}^u}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix} -\mathrm{e}^u-\sin v & 0 \\ -\mathrm{e}^u+\cos v & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\sin v+\mathrm{e}^u}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]}.$$

11. 设 $y=f(x,t)$，而 $t=t(x,y)$是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的函数，其中 f,F 都具有一阶连续偏导数. 试证明

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial t}}.$$

证法一 由方程组$\begin{cases} y=f(x,t), \\ F(x,y,t)=0 \end{cases}$可确定两个一元隐函数 $y=y(x)$，$t=t(x)$.

分别在两个方程两端对 x 求导可得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x},\\ \dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial F}{\partial t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=0.\end{cases}$$

移项得
$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial f}{\partial x},\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial F}{\partial t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\partial F}{\partial x}.\end{cases}$$

当 $D=\begin{vmatrix}1 & -\dfrac{\partial f}{\partial t}\\ \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial t}\end{vmatrix}=\dfrac{\partial F}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial y}\neq 0$ 时，解方程组得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{D}\cdot\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & -\dfrac{\partial f}{\partial t}\\ -\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial t}\end{vmatrix}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial y}}.$$

证法二 分别在 $y=f(x,t)$ 及 $F(x,y,t)=0$ 两端求全微分，得

$$\begin{cases}\mathrm{d}y=f_x\mathrm{d}x+f_t\mathrm{d}t, & (1)\\ F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_t\mathrm{d}t=0. & (2)\end{cases}$$

由(2)，得
$$F_t\mathrm{d}t=-(F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y). \qquad (3)$$

将 F_t 乘以(1)式两端，并以(3)式代入，得

$$F_t\mathrm{d}y=f_xF_t\mathrm{d}x-f_t(F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y),$$

即
$$(F_t+f_tF_y)\mathrm{d}y=(f_xF_t-f_tF_x)\mathrm{d}x.$$

故当 $F_t+f_tF_y\neq 0$ 时，有 $\quad\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{f_xF_t-f_tF_x}{F_t+f_tF_y}.$

习题 9-6 多元函数微分学的几何应用

1. 设 $\boldsymbol{f}(t)=f_1(t)\boldsymbol{i}+f_2(t)\boldsymbol{j}+f_3(t)\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{g}(t)=g_1(t)\boldsymbol{i}+g_2(t)\boldsymbol{j}+g_3(t)\boldsymbol{k}$，$\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{u}$，$\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{g}(t)=\boldsymbol{v}$，证明 $\lim\limits_{t\to t_0}[\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t)]=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$.

证

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t)]=\lim_{t\to t_0}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t)\\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t)\end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&=\lim_{t\to t_0}\Big(f_2(t)g_3(t)-f_3(t)g_2(t),f_3(t)g_1(t)-f_1(t)g_3(t),\\
&\quad f_1(t)g_2(t)-f_2(t)g_1(t)\Big)\\
&=\Big(\lim_{t\to t_0}[f_2(t)g_3(t)-f_3(t)g_2(t)],\lim_{t\to t_0}[f_3(t)g_1(t)-\\
&\quad f_1(t)g_3(t)],\lim_{t\to t_0}[f_1(t)g_2(t)-f_2(t)g_1(t)]\Big),\\
&=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \lim\limits_{t\to t_0}f_1(t) & \lim\limits_{t\to t_0}f_2(t) & \lim\limits_{t\to t_0}f_3(t)\\ \lim\limits_{t\to t_0}g_1(t) & \lim\limits_{t\to t_0}g_2(t) & \lim\limits_{t\to t_0}g_3(t)\end{vmatrix}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}.
\end{aligned}
$$

这个结果表示：两个向量值函数的向量积的极限等于它们各自的极限（向量）的向量积，即

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t)]=[\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{f}(t)]\times[\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{g}(t)].$$

2. 下列各题中，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)$ 是空间中的质点 M 在时刻 t 的位置，求质点 M 在时刻 t_0 的速度向量和加速度向量，以及在任意时刻 t 的速率.

(1) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)=(t+1)\boldsymbol{i}+(t^2-1)\boldsymbol{j}+2t\boldsymbol{k},t_0=1$;

(2) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)=(2\cos t)\boldsymbol{i}+(3\sin t)\boldsymbol{j}+4t\boldsymbol{k},t_0=\dfrac{\pi}{2}$;

(3) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)=[2\ln(t+1)]\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+\dfrac{1}{2}t^2\boldsymbol{k},t_0=1$.

解 (1) 速度向量 $\boldsymbol{v}_0=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=1}=(\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})\Big|_{t=1}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$,

加速度向量 $\boldsymbol{a}_0=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\Big|_{t=1}=2\boldsymbol{j}$,

速率 $|\boldsymbol{v}(t)|=|\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}|=\sqrt{5+4t^2}$.

(2) 速度向量 $\boldsymbol{v}_0=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=[(-2\sin t)\boldsymbol{i}+(3\cos t)\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}]_{t=\frac{\pi}{2}}=-2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{k}$,

加速度向量 $\boldsymbol{a}_0=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=[(-2\cos t)\boldsymbol{i}-(3\sin t)\boldsymbol{j}]_{t=\frac{\pi}{2}}=-3\boldsymbol{j}$,

速率 $|\boldsymbol{v}(t)|=|(-2\sin t)\boldsymbol{i}+(3\cos t)\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}|=\sqrt{9\cos^2t+4\sin^2t+16}$

$=\sqrt{20+5\cos^2t}$.

(3) 速度向量 $\boldsymbol{v}_0=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=1}=\left(\dfrac{2}{t+1}\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}\right)\Big|_{t=1}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,

加速度向量 $\boldsymbol{a}_0=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\Big|_{t=1}=\left[-\dfrac{2}{(t^2+1)^2}\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\right]_{t=1}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,

速率 $|\boldsymbol{v}(t)|=\left|\dfrac{2}{t+1}\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}\right|=\sqrt{5t^2+\dfrac{4}{(t+1)^2}}$.

3. 求曲线$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)=(t-\sin t)\boldsymbol{i}+(1-\cos t)\boldsymbol{j}+\left(4\sin\frac{t}{2}\right)\boldsymbol{k}$在与$t_0=\frac{\pi}{2}$相应的点处的切线及法平面方程.

解 与$t_0=\frac{\pi}{2}$相应的点为$\left(\frac{\pi}{2}-1,1,2\sqrt{2}\right)$，曲线在该点处的切向量为$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{f}'(t_0)=(1,1,\sqrt{2})$，于是所求切线方程为

$$\frac{x-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

法平面方程为

$$1\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}+1\right)+1\cdot(y-1)+\sqrt{2}(z-2\sqrt{2})=0,$$

即
$$x+y+\sqrt{2}z=\frac{\pi}{2}+4.$$

4. 求曲线$x=\frac{t}{1+t},y=\frac{1+t}{t},z=t^2$在对应于$t=1$的点处的切线及法平面方程.

解 曲线在对应于$t=1$的点为$\left(\frac{1}{2},2,1\right)$，该点处的切向量

$$\boldsymbol{T}=\left(x'(1),y'(1),z'(1)\right)=\left(\frac{1}{(1+t)^2},-\frac{1}{t^2},2t\right)\bigg|_{t=1}=\left(\frac{1}{4},-1,2\right),$$

于是曲线在该点处的切线方程为

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2},$$

即
$$\frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-1}{8}.$$

所求法平面方程为

$$\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)-(y-2)+2(z-1)=0,$$

即
$$2x-8y+16z-1=0.$$

5. 求曲线$y^2=2mx,z^2=m-x$在点(x_0,y_0,z_0)处的切线及法平面方程.

解 设曲线的参数方程中的参数为x，将方程$y^2=2mx$和$z^2=m-x$两端分别对x求导，得

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2m,2z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1,\text{即}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{m}{y},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{2z}.$$

所以曲线在点(x_0,y_0,z_0)的切向量为

$$T=\left(1,\frac{m}{y_0},-\frac{1}{2z_0}\right).$$

于是在点(x_0,y_0,z_0)处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\frac{m}{y_0}}=\frac{z-z_0}{-\frac{1}{2z_0}}.$$

法平面方程为 $(x-x_0)+\frac{m}{y_0}(y-y_0)-\frac{1}{2z_0}(z-z_0)=0.$

6. 求曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0,\\2x-3y+5z-4=0\end{cases}$在点$(1,1,1)$处的切线及法平面方程.

解法一 为了求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$,在所给方程两端分别对$x$求导,得

$$\begin{cases}2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-3=0,\\2-3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-2x+3,\\3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-5\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2.\end{cases}$$

当$D=\begin{vmatrix}2y & 2z\\3 & -5\end{vmatrix}=-10y-6z\neq0$时,解方程组得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}-2x+3 & 2z\\2 & -5\end{vmatrix}=\frac{10x-4z-15}{-10y-6z},$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}2y & -2x+3\\3 & 2\end{vmatrix}=\frac{6x+4y-9}{-10y-6z}.$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,1,1)}=\frac{9}{16},\ \left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,1,1)}=-\frac{1}{16}.$$

于是在点$(1,1,1)$处的切线方程为 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{\frac{9}{16}}=\frac{z-1}{-\frac{1}{16}}$,

即 $$\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}.$$

法平面方程为 $(x-1)+\frac{9}{16}(y-1)-\frac{1}{16}(z-1)=0$,

即 $$16x+9y-z-24=0.$$

解法二 所求曲线的切线,也就是曲面$x^2+y^2+z^2-3x=0$在点$(1,1,1)$处的切平面与平面$2x-3y+5z=4$的交线,利用曲面的切平面方程得所求切线为

$$\begin{cases}-(x-1)+2(y-1)+2(z-1)=0,\\2x-3y+5z=4.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}-x+2y+2z=3,\\2x-3y+5z=4.\end{cases}$$

这切线的方向向量为(16,9,−1)，于是所求法平面方程为

$$16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0,$$

即
$$16x+9y-z-24=0.$$

7. 求出曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上的点，使在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

解　因为 $x'_t=1, y'_t=2t, z'_t=3t^2$，设所求点对应的参数为 t_0，于是曲线在该点处的切向量可取为 $\boldsymbol{T}=(1,2t_0,3t_0^2)$. 已知平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,2,1)$，由切线与平面平行，得 $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}=0$，即 $1+4t_0+3t_0^2=0$，解得 $t_0=-1$ 和 $-\dfrac{1}{3}$. 于是所求点为 $(-1,1,-1)$ 或 $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},-\dfrac{1}{27}\right)$.

8. 求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点(2,1,0)处的切平面及法线方程.

解　令 $F(x,y,z)=e^z-z+xy-3$，则

$$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(y,x,e^z-1),\boldsymbol{n}\Big|_{(2,1,0)}=(1,2,0).$$

曲面在点(2,1,0)处的切平面方程为

$$1\cdot(x-2)+2(y-1)+0\cdot(z-0)=0,$$

即
$$x+2y-4=0.$$

曲面在点(2,1,0)处的法线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2},\\z=0.\end{cases}$$

9. 求曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面及法线方程.

解　令 $F(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2-1$，则曲面在点 (x,y,z) 处的一个法向量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}&=(F_x,F_y,F_z)=(2ax,2by,2cz)\\&=2(ax,by,cz),\end{aligned}$$

在点 (x_0,y_0,z_0) 处的一个法向量为 (ax_0,by_0,cz_0)，故曲面在该点处的切平面方程为

$$ax_0(x-x_0)+by_0(y-y_0)+cz_0(z-z_0)=0,$$

即
$$ax_0x+by_0y+cz_0z=ax_0^2+by_0^2+cz_0^2=1.$$

法线方程为
$$\frac{x-x_0}{ax_0}=\frac{y-y_0}{by_0}=\frac{z-z_0}{cz_0}.$$

10. 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

解 设 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-1$，则曲面在点 (x,y,z) 处的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(2x,4y,2z)$. 已知平面的法向量为 $(1,-1,2)$，由已知平面与所求切平面平行，得
$$\frac{2x}{1}=\frac{4y}{-1}=\frac{2z}{2},\text{即 } x=\frac{1}{2}z,y=-\frac{1}{4}z.$$
代入椭球面方程得
$$\left(\frac{z}{2}\right)^2+2\left(-\frac{z}{4}\right)^2+z^2=1.$$
解得 $z=\pm2\sqrt{\frac{2}{11}}$，则 $x=\pm\sqrt{\frac{2}{11}}$，$y=\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}$.

所以切点为
$$\left(\pm\sqrt{\frac{2}{11}},\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}},\pm2\sqrt{\frac{2}{11}}\right).$$
所求切平面方程为
$$\left(x\pm\sqrt{\frac{2}{11}}\right)-\left(y\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}\right)+2\left(z\pm2\sqrt{\frac{2}{11}}\right)=0,$$
即
$$x-y+2z=\pm\sqrt{\frac{11}{2}}.$$

11. 求旋转椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 上点 $(-1,-2,3)$ 处的切平面与 xOy 面的夹角的余弦.

解 令 $F(x,y,z)=3x^2+y^2+z^2-16$，曲面的法向量为
$$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(6x,2y,2z),$$
曲面在点 $(-1,-2,3)$ 处的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{n}\Big|_{(-1,-2,3)}=(-6,-4,6)$，$xOy$ 面的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$，记 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 的夹角为 γ，则所求的余弦值为
$$\cos\gamma=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{6}{\sqrt{6^2+4^2+6^2}\cdot1}=\frac{3}{\sqrt{22}}.$$

12. 试证曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\,(a>0)$ 上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a.

证 设 $F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$，则曲面在点 (x,y,z) 处的一个法向量
$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}},\frac{1}{2\sqrt{y}},\frac{1}{2\sqrt{z}}\right).$$
在曲面上任取一点 $M(x_0,y_0,z_0)$，则曲面在点 M 处的切平面方程为
$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0,$$

即 $$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a},$$

化为截距式，得 $$\frac{x}{\sqrt{ax_0}}+\frac{y}{\sqrt{ay_0}}+\frac{z}{\sqrt{az_0}}=1,$$

所以截距之和为

$$\sqrt{ax_0}+\sqrt{ay_0}+\sqrt{az_0}=\sqrt{a}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=a.$$

13. 设 $\boldsymbol{u}(t)$、$\boldsymbol{v}(t)$ 是可导的向量值函数，证明：

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\pm\boldsymbol{v}(t)]=\boldsymbol{u}'(t)\pm\boldsymbol{v}'(t)$；

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)]=\boldsymbol{u}'(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}'(t)$；

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t)]=\boldsymbol{u}'(t)\times\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}'(t)$.

证 (1)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\pm\boldsymbol{v}(t)]=\lim_{\Delta t\to0}\frac{[\boldsymbol{u}(t+\Delta t)\pm\boldsymbol{v}(t+\Delta t)]-[\boldsymbol{u}(t)\pm\boldsymbol{v}(t)]}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)}{\Delta t}\pm\lim_{\Delta t\to0}\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}=\boldsymbol{u}'(t)\pm\boldsymbol{v}'(t),$$

其中用到了向量值函数的极限的四则运算法则.

(2) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)]=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)\cdot\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)\cdot\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t+\Delta t)}{\Delta t}+$$

$$\lim_{\Delta t\to0}\frac{\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

$$=\left[\lim_{\Delta t\to0}\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)}{\Delta t}\right]\cdot\left[\lim_{\Delta t\to0}\boldsymbol{v}(t+\Delta t)\right]+\left[\lim_{\Delta t\to0}\boldsymbol{u}(t)\right]\cdot$$

$$\left[\lim_{\Delta t\to0}\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}\right]$$

$$=\boldsymbol{u}'(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}'(t),$$

其中用到了向量值函数极限的四则运算法则以及数量积与极限运算次序的交换。

(3) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t)]=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)\times\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)\times\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t+\Delta t)+\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to0}\left[\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)}{\Delta t}\times\boldsymbol{v}(t+\Delta t)\right]+\lim_{\Delta t\to0}\left[\boldsymbol{u}(t)\times\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}\right]$$

$$=\left[\lim_{\Delta t\to0}\frac{\boldsymbol{u}(t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(t)}{\Delta t}\right]\times\left[\lim_{\Delta t\to0}\boldsymbol{v}(t+\Delta t)\right]+\left[\lim_{\Delta t\to0}\boldsymbol{u}(t)\right]\times\left[\lim_{\Delta t\to0}\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}\right]$$

$=\boldsymbol{u}'(t)\times\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}'(t)$,

其中用到了向量值函数极限的四则运算法则以及向量积与极限运算次序的交换.

习题9-7 方向导数与梯度

1. 求函数 $z=x^2+y^2$ 在点(1,2)处沿从点(1,2)到点$(2,2+\sqrt{3})$的方向的方向导数.

解 按题意,方向 $\boldsymbol{l}=(1,\sqrt{3})$,$\boldsymbol{e}_l=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

又
$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\frac{\partial z}{\partial y}=2y,\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=2,\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=4,$$

故
$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,2)}=2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1+2\sqrt{3}.$$

2. 求函数 $z=\ln(x+y)$在抛物线 $y^2=4x$ 上点(1,2)处,沿着这抛物线在该点处偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数.

解 先求切线斜率:在 $y^2=4x$ 两端分别对 x 求导,得

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=4.$$

于是
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{y},\quad k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,2)}=1,$$

切线方向 $\boldsymbol{l}=(1,1)$,$\boldsymbol{e}_l=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

又
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\left.\frac{1}{x+y}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{3},$$
$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=\left.\frac{1}{x+y}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{3}.$$

故
$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

3. 求函数 $z=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$在点$\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$处沿曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在这点的内法线方向的方向导数.

解 先求切线斜率:在$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 两端分别对 x 求导,得

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0.$$

于是
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{b^2x}{a^2y},\quad k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}=-\frac{b}{a},$$

法线斜率为

$$k' = -\frac{1}{k} = \frac{a}{b},$$

内法线方向 $\boldsymbol{l}=(-b,-a)$，$\boldsymbol{e}_l=\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

又
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)} = -\frac{\sqrt{2}}{a},\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)} = -\frac{\sqrt{2}}{b}.$$

故
$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)} = -\frac{\sqrt{2}}{a}\cdot\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)-\frac{\sqrt{2}}{b}\cdot\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$
$$=\frac{1}{ab}\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

4. 求函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点(1,1,2)处沿方向角为 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$，$\gamma=\frac{\pi}{3}$ 的方向的方向导数.

解 因为$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2-yz$，$\frac{\partial u}{\partial y}=2xy-xz$，$\frac{\partial u}{\partial z}=3z^2-xy$，

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,2)} = -1,\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,2)} = 0,\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,2)} = 11.$$

$$\boldsymbol{e}_l = \left(\cos\frac{\pi}{3},\cos\frac{\pi}{4},\cos\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right),$$

所以
$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,1,2)} = -1\cdot\frac{1}{2}+0+11\cdot\frac{1}{2} = 5.$$

5. 求函数 $u = xyz$ 在点(5,1,2)处沿从点(5,1,2)到点(9,4,14)的方向的方向导数.

解 按题意，方向 $l=(4,3,12)$，$\boldsymbol{e}_l=\left(\frac{4}{13},\frac{3}{13},\frac{12}{13}\right)$.

又
$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz,\frac{\partial u}{\partial y} = xz,\frac{\partial u}{\partial z} = xy,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(5,1,2)} = 2,\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(5,1,2)} = 10,\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(5,1,2)} = 5,$$

故
$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(5,1,2)} = 2\cdot\frac{4}{13}+10\cdot\frac{3}{13}+5\cdot\frac{12}{13} = \frac{98}{13}.$$

6. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在曲线 $x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$ 上点(1,1,1)处，沿曲线在该点的切线正方向(对应于 t 增大的方向)的方向导数.

解 先求曲线在给定点的切线方向.

因为 $x'_t=1$，$y'_t=2t$，$z'_t=3t^2$，所以曲线在点(1,1,1)处的切线的方向向量可取为 $\boldsymbol{T}=(1,2,3)$，$\boldsymbol{e}_T=\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$.

又 $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=2,\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=2,\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=2,$$

故 $$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{T}}\right|_{(1,1,1)}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}+2\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+2\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{6}{7}\sqrt{14}.$$

7. 求函数 $u=x+y+z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上点 (x_0,y_0,z_0) 处，沿球面在该点的外法线方向的方向导数.

解 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$，则 $F_x=2x,F_y=2y,F_z=2z$，于是球面在 (x_0,y_0,z_0) 处的外法线方向向量可取为

$$\boldsymbol{l}=\left.(F_x,F_y,F_z)\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=(2x_0,2y_0,2z_0),$$

$\boldsymbol{l}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}},\cos\beta=\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}},\cos\gamma=\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}},$$

又 $$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\frac{\partial u}{\partial y}=1,\frac{\partial u}{\partial z}=1.$$

故 $$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}&=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\\&=1\cdot\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}+1\cdot\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}+1\cdot\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}\\&=\frac{x_0+y_0+z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}\\&=x_0+y_0+z_0.\end{aligned}$$

8. 设 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，求 $\mathbf{grad}f(0,0,0)$ 及 $\mathbf{grad}f(1,1,1)$.

解 $$\begin{aligned}\mathbf{grad}f(x,y,z)&=f_x\boldsymbol{i}+f_y\boldsymbol{j}+f_z\boldsymbol{k}\\&=(2x+y+3)\boldsymbol{i}+(4y+x-2)\boldsymbol{j}+(6z-6)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

$$\mathbf{grad}f(0,0,0)=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k},$$

$$\mathbf{grad}f(1,1,1)=6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}.$$

9. 设函数 $u(x,y,z),v(x,y,z)$ 的各个偏导数都存在且连续，证明：

(1) $\nabla(Cu)=C\nabla u$（其中 C 为常数）；

(2) $\nabla(u\pm v)=\nabla u\pm\nabla v$；

(3) $\nabla(uv)=v\nabla u+u\nabla v$；

(4) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\nabla u-u\nabla v}{v^2}$.

证 (1) $$\nabla(Cu)=\left(C\frac{\partial u}{\partial x},C\frac{\partial u}{\partial y},C\frac{\partial u}{\partial z}\right)=C\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$=C\nabla u.$$

(2) $$\nabla(u\pm v)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\pm\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\pm\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\pm\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\pm\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$=\nabla u\pm\nabla v.$$

(3) $$\nabla(uv)=\left(\frac{\partial}{\partial x}(uv),\frac{\partial}{\partial y}(uv),\frac{\partial}{\partial z}(uv)\right)$$
$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}v+u\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}v+u\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}v+u\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$=v\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)+u\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$=v\nabla u+u\nabla v.$$

(4) $$\nabla\left(\frac{u}{v}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right),\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{v}\right),\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u}{v}\right)\right)$$
$$=\left(\frac{v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}}{v^2},\frac{v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}}{v^2},\frac{v\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial v}{\partial z}}{v^2}\right)$$
$$=\frac{1}{v}\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\frac{u}{v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$=\frac{v\nabla u-u\nabla v}{v^2}.$$

10. 求函数 $u=xy^2z$ 在点 $P_0(1,-1,2)$ 处变化最快的方向，并求沿这个方向的方向导数.

解 $$\nabla u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}=y^2z\boldsymbol{i}+2xyz\boldsymbol{j}+xy^2\boldsymbol{k},$$
$$\nabla u\Big|_{P_0}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

由方向导数与梯度的关系可知，$u=xy^2z$ 在 P_0 处沿 $\boldsymbol{n}=\nabla u|_{P_0}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 的方向增加最快，其方向导数为
$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{P_0}=|\nabla u|_{P_0}|=|2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}|=\sqrt{21};$$
沿 $\boldsymbol{n}_1=-\nabla u|_{P_0}=-2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 方向减少最快，其方向导数为
$$\frac{\partial u}{\partial n_1}\Big|_{P_0}=-\sqrt{21}.$$

习题9-8 多元函数的极值及其求法

1. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1,$$

则下述四个选项中正确的是(　　).

(A) 点(0,0)不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(B) 点(0,0)是 $f(x,y)$ 的极大值点.

(C) 点(0,0)是 $f(x,y)$ 的极小值点.

(D) 根据所给条件无法判断(0,0)是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

解 令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$,则由题意可知

$$f(x,y)=xy+\rho^4+o(\rho^4),$$

当 $(x,y)\to(0,0)$ 时,$\rho\to 0$.

由于 $f(x,y)$ 在(0,0)附近的值主要由 xy 决定,而 xy 在(0,0)附近符号不定,故点(0,0)不是 $f(x,y)$ 的极值点,应选(A).

本题也可以取两条路径 $y=x$ 和 $y=-x$ 来考虑. 当 $|x|$ 充分小时,

$$f(x,x)=x^2+4x^4+o(x^4)>0,$$
$$f(x,-x)=-x^2+4x^4+o(x^4)<0,$$

故点(0,0)不是 $f(x,y)$ 的极值点,应选(A).

2. 求函数 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 的极值.

解 解方程组

$$\begin{cases} f_x=4-2x=0, \\ f_y=-4-2y=0, \end{cases}$$

求得驻点 $(2,-2)$.

又 $$A=f_{xx}(2,-2)=-2<0, B=f_{xy}(2,-2)=0,$$
$$C=f_{yy}(2,-2)=-2, \quad AC-B^2=4>0,$$

由判定极值的充分条件知:在点 $(2,-2)$ 处,函数取得极大值 $f(2,-2)=8$.

3. 求函数 $f(x,y)=(6x-x^2)(4y-y^2)$ 的极值.

解 解方程组

$$\begin{cases} f_x=(6-2x)(4y-y^2)=0, \\ f_y=(6x-x^2)(4-2y)=0. \end{cases}$$

求得以下五组解:

$$\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=0, \\ y_2=4, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=3, \\ y_3=2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=6, \\ y_4=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_5=6, \\ y_5=4. \end{cases}$$

于是,得驻点(0,0),(0,4),(3,2),(6,0),(6,4).

又 $$f_{xx}(x,y)=-2(4y-y^2),$$
$$f_{xy}(x,y)=4(3-x)(2-y),$$
$$f_{yy}(x,y)=-2(6x-x^2).$$

由判定极值的充分条件知：

在点(0,0)处，$A=f_{xx}(0,0)=0$，$B=f_{xy}(0,0)=24$，$C=f_{yy}(0,0)=0$，$AC-B^2=-24^2<0$，故 $f(0,0)$不是极值；

在点(0,4)处，$A=f_{xx}(0,4)=0$，$B=f_{xy}(0,4)=-24$，$C=f_{yy}(0,4)=0$，$AC-B^2=-24^2<0$，故 $f(0,4)$不是极值；

在点(3,2)处，$A=f_{xx}(3,2)=-8<0$，$B=f_{xy}(3,2)=0$，$C=f_{yy}(3,2)=-18$，$AC-B^2=144>0$，故函数在点(3,2)处取得极大值，极大值为 $f(3,2)=36$；

在点(6,0)处，$A=f_{xx}(6,0)=0$，$B=f_{xy}(6,0)=-24$，$C=f_{yy}(6,0)=0$，$AC-B^2=-24^2<0$，故 $f(6,0)$不是极值；

在点(6,4)处，$A=f_{xx}(6,4)=0$，$B=f_{xy}(6,4)=24$，$C=f_{yy}(6,4)=0$，$AC-B^2=-24^2<0$，故 $f(6,4)$不是极值.

4. 求函数 $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$的极值.

解 解方程组

$$\begin{cases} f_x = e^{2x}(2x+2y^2+4y+1)=0, \\ f_y = e^{2x}(2y+2)=0, \end{cases}$$

求得驻点 $\left(\frac{1}{2},-1\right)$.

又 $A=f_{xx}\left(\frac{1}{2},-1\right)=2e>0$，$B=f_{xy}\left(\frac{1}{2},-1\right)=0$，$C=f_{yy}\left(\frac{1}{2},-1\right)=2e$，

$AC-B^2=4e^2>0$，

由判定极值的充分条件知，在点$\left(\frac{1}{2},-1\right)$处，函数取得极小值

$$f\left(\frac{1}{2},-1\right)=-\frac{e}{2}.$$

5. 求函数 $z=xy$ 在适合附加条件 $x+y=1$ 下的极大值.

解 本题属条件极值问题，易将它化为无条件极值问题.

条件 $x+y=1$ 可表示成 $y=1-x$，代入 $z=xy$，则问题化为求 $z=x(1-x)$ 的极大值.

由 $$\frac{dz}{dx}=1-2x=0，得 x=\frac{1}{2}.$$

又 $$\left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=\frac{1}{2}}=-2<0.$$

由一元函数取得极值的充分条件知，$x=\frac{1}{2}$为极大值点，极大值为

$$z=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

6. 从斜边之长为 l 的一切直角三角形中，求有最大周长的直角三角形.

解 设直角三角形的两直角边之长分别为 x,y，则周长

$$S=x+y+l\quad(0<x<l,0<y<l).$$

本题是求周长 S 在 $x^2+y^2=l^2$ 条件下的条件极值问题.

作拉格朗日函数

$$L(x,y)=x+y+l+\lambda(x^2+y^2-l^2).$$

令

$$\begin{cases}L_x=1+2\lambda x=0,\\ L_y=1+2\lambda y=0.\end{cases}$$

解得 $x=y=-\dfrac{1}{2\lambda}$. 代入 $x^2+y^2=l^2$，得 $\lambda=-\dfrac{\sqrt{2}}{2l}$，于是 $x=y=\dfrac{l}{\sqrt{2}}$，$\left(\dfrac{l}{\sqrt{2}},\dfrac{l}{\sqrt{2}}\right)$是惟一可能的极值点，根据问题性质可知这种最大周长的直角三角形一定存在，所以在斜边之长为 l 的一切直角三角形中，周长最大的是等腰直角三角形.

注 条件极值的解法，一般是采用拉格朗日乘数法求解. 但要注意利用乘数法所得到的点只是可能极值点，究竟这些点是否极值点以及是极大点还是极小点尚需进一步判断. 在实际问题中往往可根据问题本身的性质来判定. 在特殊情形下，条件极值问题可化为无条件极值问题求解.

7. 要造一个容积等于定数 k 的长方体无盖水池，应如何选择水池的尺寸，方可使它的表面积最小.

解 设水池的长为 a，宽为 b，高为 c，则水池的表面积为

$$A=ab+2ac+2bc(a>0,b>0,c>0).$$

约束条件 $abc=k$.

作拉格朗日函数 $L(a,b,c)=ab+2ac+2bc+\lambda(abc-k)$.

由

$$\begin{cases}L_a=b+2c+\lambda bc=0,\\ L_b=a+2c+\lambda ac=0,\\ L_c=2a+2b+\lambda ab=0,\\ abc=k,\end{cases}$$

解得 $a=b=\sqrt[3]{2k}$，$c=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$，$\lambda=-\sqrt[3]{\dfrac{32}{k}}$.

$\left(\sqrt[3]{2k},\sqrt[3]{2k},\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2k}\right)$是惟一可能的极值点，由问题本身可知 A 一定有最小值，所以表面积最小的水池的长和宽都应为$\sqrt[3]{2k}$，高为$\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2k}$.

8. 在平面 xOy 上求一点，使它到 $x=0$，$y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 三直线的距离平方之和为最小.

解 设所求点为(x,y)，则此点到三直线的距离依次为：$|y|$，$|x|$，$\frac{|x+2y-16|}{\sqrt{5}}$，三距离平方之和为

$$z=x^2+y^2+\frac{1}{5}(x+2y-16)^2.$$

由

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=2x+\frac{2}{5}(x+2y-16)=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=2y+\frac{4}{5}(x+2y-16)=0\end{cases}$$

求得惟一可能的极值点$\left(\frac{8}{5},\frac{16}{5}\right)$. 根据问题本身可知，距离平方和最小的点必定存在，故所求点即为$\left(\frac{8}{5},\frac{16}{5}\right)$.

9. 将周长为$2p$的矩形绕它的一边旋转而构成一个圆柱体. 问矩形的边长各为多少时，才可使圆柱体的体积为最大?

解 设矩形的一边长为x，则另一边长为$p-x$，假设矩形绕长为$p-x$的一边旋转，则旋转所成圆柱体的体积为$V=\pi x^2(p-x)$. 由

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=2\pi x(p-x)-\pi x^2=\pi x(2p-3x)=0,$$

求得驻点为$x=\frac{2}{3}p$.

由于驻点惟一，由题意又可知这种圆柱体一定有最大值，所以当矩形的边长为$\frac{2p}{3}$和$\frac{p}{3}$时，绕短边旋转所得圆柱体体积最大.

10. 求内接于半径为a的球且有最大体积的长方体.

解 设球面方程为$x^2+y^2+z^2=a^2$，(x,y,z)是它的内接长方体在第一卦限内的一个顶点，则此长方体的长、宽、高分别为$2x$、$2y$、$2z$，体积为

$$V=2x\cdot 2y\cdot 2z=8xyz.$$

令

$$L(x,y,z)=8xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-a^2),$$

由

$$\begin{cases}L_x=8yz+2\lambda x=0,\\ L_y=8xz+2\lambda y=0,\\ L_z=8xy+2\lambda z=0,\end{cases}\quad \text{即} \quad \begin{cases}4yz+\lambda x=0,\\ 4xz+\lambda y=0,\\ 4xy+\lambda z=0,\end{cases}$$

解得$x=y=z=-\frac{\lambda}{4}$，代入$x^2+y^2+z^2=a^2$，得$\lambda=-\frac{4}{\sqrt{3}}a$，故$\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$为惟一可能的极值点，由于内接于球且有最大体积的长方体必定存在，所以当长方体

的长、宽、高都为$\frac{2a}{\sqrt{3}}$时其体积最大.

11. 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆,求这椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值.

解 设椭圆上的点为(x,y,z),则椭圆上的点到原点的距离平方为

$$d^2=x^2+y^2+z^2.$$

x,y,z 满足条件:$z=x^2+y^2, x+y+z=1$.

作拉格朗日函数

$$L=x^2+y^2+z^2+\lambda(z-x^2-y^2)+\mu(x+y+z-1).$$

令

$$\begin{cases} L_x=2x-2\lambda x+\mu=0, & (1)\\ L_y=2y-2\lambda y+\mu=0, & (2)\\ L_z=2z+\lambda+\mu=0. & (3)\end{cases}$$

(1)−(2),得 $$(1-\lambda)(x-y)=0.$$

故有 $\lambda=1$ 或 $x=y$.

由 $\lambda=1\Rightarrow\mu=0, z=-\frac{1}{2}$,不合题意,故舍去.

将 $x=y$ 代入 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=1$,得

$$z=2x^2, 2x+z=1\Rightarrow 2x^2+2x-1=0.$$

解得 $$x=y=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}, z=2\mp\sqrt{3}.$$

于是得到两个可能的极值点:

$$M_1\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2},2-\sqrt{3}\right), M_2\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1-\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3}\right).$$

由题意可知这种距离的最大值和最小值一定存在,所以距离的最大值和最小值分别在这两点处取得. 而

$$2\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}\right)^2+(2\mp\sqrt{3})^2=9\mp5\sqrt{3},$$

故最大值与最小值分别为

$$d_{\max}=d_{M_2}=\sqrt{9+5\sqrt{3}}, d_{\min}=d_{M_1}=\sqrt{9-5\sqrt{3}}.$$

12. 设有一圆板占有平面闭区域$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant1\}$. 该圆板被加热,以致在点$(x,y)$的温度是

$$T=x^2+2y^2-x,$$

求该圆板的最热点和最冷点.

解 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial T}{\partial x}=2x-1=0,\\ \dfrac{\partial T}{\partial y}=4y=0,\end{cases}$$

求得驻点$\left(\frac{1}{2},0\right)$. $T_1=T\Big|_{\left(\frac{1}{2},0\right)}=-\frac{1}{4}$.

在边界 $x^2+y^2=1$ 上，　　$T=2-(x^2+x)=\frac{9}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$，

当 $x=-\frac{1}{2}$时，有边界上的最大值 $T_2=\frac{9}{4}$，$x=1$ 时，有边界上的最小值 $T_3=0$.

比较 T_1，T_2 及 T_3 的值知，最热点在$\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$T_{\max}=\frac{9}{4}$，最冷点在$\left(\frac{1}{2},0\right)$，$T_{\min}=-\frac{1}{4}$.

13. 形状为椭球 $4x^2+y^2+4z^2\leqslant 16$ 的空间探测器进入地球大气层，其表面开始受热，1 小时后在探测器的点(x,y,z)处的温度 $T=8x^2+4yz-16z+600$，求探测器表面最热的点.

解　作拉格朗日函数

$$L=8x^2+4yz-16z+600+\lambda(4x^2+y^2+4z^2-16).$$

令

$$\begin{cases}L_x=16x+8\lambda x=0, & (1)\\ L_y=4z+2\lambda y=0, & (2)\\ L_z=4y-16+8\lambda z=0. & (3)\end{cases}$$

由(1)得 $x=0$ 或 $\lambda=-2$.

若 $\lambda=-2$，代入(2)、(3)，得 $y=z=-\frac{4}{3}$. 再将 $y=z=-\frac{4}{3}$代入约束条件

$$4x^2+y^2+4z^2=16,\tag{4}$$

得 $x=\pm\frac{4}{3}$. 于是得到两个可能的极值点：$M_1\left(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)$，$M_2\left(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)$.

若 $x=0$，由(2)、(3)、(4)解得 $\lambda=0$，$y=4$，$z=0$；$\lambda=\sqrt{3}$，$y=-2$，$z=\sqrt{3}$；$\lambda=-\sqrt{3}$，$y=-2$，$z=-\sqrt{3}$. 于是得到另外三个可能极值点：$M_3(0,4,0)$，$M_4(0,-2,\sqrt{3})$，$M_5(0,-2,-\sqrt{3})$.

比较 T 在上述五个可能极值点处的数值知：$T\Big|_{M_1}=T\Big|_{M_2}=\frac{1928}{3}$为最大，故探测器表面最热的点为 $M\left(\pm\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)$.

习题9-9　二元函数的泰勒公式

1. 求函数 $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ 在点 $(1,-2)$ 的泰勒公式.

解　$f(1,-2)=5, f_x(1,-2)=(4x-y-6)|_{(1,-2)}=0$,

$f_y(1,-2)=(-x-2y-3)|_{(1,-2)}=0$,

$f_{xx}(1,-2)=4, f_{xy}(1,-2)=-1, f_{yy}(1,-2)=-2.$

函数为 2 次多项式,3 阶及 3 阶以上的各偏导数均为零. 又

$$h=x-1, k=y+2.$$

将以上各项代入泰勒公式,便得

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(1,-2)+(x-1)f_x(1,-2)+(y+2)f_y(1,-2)+\frac{1}{2!}[(x-1)^2\cdot \\ &\quad f_{xx}(1,-2)+2(x-1)(y+2)f_{xy}(1,-2)+(y+2)^2f_{yy}(1,-2)] \\ &= 5+\frac{1}{2}[4(x-1)^2-2(x-1)(y+2)-2(y+2)^2] \\ &= 5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2. \end{aligned}$$

2. 求函数 $f(x,y)=e^x\ln(1+y)$ 在点 $(0,0)$ 的三阶泰勒公式.

解　$f_x(x,y)=e^x\ln(1+y)$,　$f_y(x,y)=\dfrac{e^x}{1+y}$,

$f_{xx}(x,y)=e^x\ln(1+y)$,　$f_{xy}(x,y)=\dfrac{e^x}{1+y}$,

$f_{yy}(x,y)=-\dfrac{e^x}{(1+y)^2}$,　$f_{xxx}(x,y)=e^x\ln(1+y)$,

$f_{yyy}(x,y)=\dfrac{2e^x}{(1+y)^3}$.

于是　$\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0)=hf_x(0,0)+kf_y(0,0)=k$,

$$\begin{aligned}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0) &= h^2f_{xx}(0,0)+2hkf_{xy}(0,0)+k^2f_{yy}(0,0) \\ &= 2hk-k^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(0,0) &= h^3f_{xxx}(0,0)+3h^2kf_{xxy}(0,0)+3hk^2f_{xyy}(0,0)+ \\ &\quad k^3f_{yyy}(0,0) \\ &= 3h^2k-3hk^2+2k^3.\end{aligned}$$

又　$$f(0,0)=0, h=x, k=y.$$

将以上各项代入三阶泰勒公式,便得

$$e^x\ln(1+y)=y+\frac{1}{2!}(2xy-y^2)+\frac{1}{3!}(3x^2y-3xy^2+2y^3)+R_3,$$

其中 $R_3=\frac{1}{4!}\left[\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 f(\theta h,\theta k)\right]_{h=x,k=y}$

$$=\frac{e^{\theta x}}{24}\left[x^4\ln(1+\theta y)+\frac{4x^3y}{1+\theta y}-\frac{6x^2y^2}{(1+\theta y)^2}+\frac{8xy^3}{(1+\theta y)^3}-\frac{6y^4}{(1+\theta y)^4}\right],(0<\theta<1).$$

3. 求函数 $f(x,y)=\sin x\sin y$ 在点 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 的二阶泰勒公式.

解 $f_x(x,y)=\cos x\sin y$，　$f_y(x,y)=\sin x\cos y$，

$f_{xx}(x,y)=-\sin x\sin y$，$f_{xy}(x,y)=\cos x\cos y$，

$f_{yy}(x,y)=-\sin x\sin y$，$f_{xxx}(x,y)=-\cos x\sin y$，

$f_{xxy}(x,y)=-\sin x\cos y$，$f_{xyy}(x,y)=-\cos x\sin y$，

$f_{yyy}(x,y)=-\sin x\cos y$.

于是 $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=hf_x\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)+kf_y\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}h+\frac{1}{2}k$，

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=h^2f_{xx}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)+2hkf_{xy}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)+k^2f_{yy}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}h^2+hk-\frac{1}{2}k^2.$$

又 $$f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2},h=x-\frac{\pi}{4},k=y-\frac{\pi}{4}.$$

将以上各项代入二阶泰勒公式，便得

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2!}\left[-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2\right]+R_2$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}\left[\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2\right]+R_2,$$

其中 $R_2=\frac{1}{3!}\left[\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(\xi,\eta)\right]_{h=x-\frac{\pi}{4},k=y-\frac{\pi}{4}}$

$$=-\frac{1}{6}\left[\cos\xi\sin\eta\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+3\sin\xi\cos\eta\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+3\cos\xi\sin\eta\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2+\sin\xi\cos\eta\cdot\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^3\right],$$

$$\xi=\frac{\pi}{4}+\theta\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\eta=\frac{\pi}{4}+\theta\left(y-\frac{\pi}{4}\right),0<\theta<1.$$

4. 利用函数 $f(x,y)=x^y$ 的三阶泰勒公式，计算 $1.1^{1.02}$ 的近似值.

解 先求函数 $f(x,y)=x^y$ 在点(1,1)的三阶泰勒公式.

$f_x(1,1)=yx^{y-1}|_{(1,1)}=1, f_y(1,1)=x^y\ln x|_{(1,1)}=0,$

$f_{xx}(1,1)=y(y-1)x^{y-2}|_{(1,1)}=0,$

$f_{xy}(1,1)=(x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x)|_{(1,1)}=1,$

$f_{yy}(1,1)=x^y\ln^2 x|_{(1,1)}=0, f_{xxx}(1,1)=y(y-1)(y-2)x^{y-3}|_{(1,1)}=0,$

$f_{xxy}(1,1)=[(2y-1)x^{y-2}+y(y-1)x^{y-2}\ln x]|_{(1,1)}=1,$

$f_{xyy}(1,1)=[2x^{y-1}\ln x+yx^{y-1}\ln^2 x]|_{(1,1)}=0,$

$f_{yyy}(1,1)=x^y\ln^3 x|_{(1,1)}=0.$

又 $$f(1,1)=1, h=x-1, k=y-1.$$

将以上各项代入三阶泰勒公式,便得

$$x^y=1+(x-1)+\frac{1}{2!}[2(x-1)(y-1)]+\frac{1}{3!}[3(x-1)^2(y-1)]+R_3$$

$$=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)+R_3.$$

因此 $1.1^{1.02}\approx 1+0.1+0.1\times 0.02+\frac{1}{2}\times 0.1^2\times 0.02$

$$=1+0.1+0.002+0.0001=1.1021.$$

5. 求函数 $f(x,y)=e^{x+y}$ 在点 $(0,0)$ 的 n 阶泰勒公式.

解 $f(0,0)=1, f_x(0,0)=e^{x+y}|_{(0,0)}=1, f_y(0,0)=e^{x+y}|_{(0,0)}=1,\cdots,$

$f^{(n)}_{x^m y^{n-m}}(0,0)=e^{x+y}|_{(0,0)}=1\ (m=0,1,\cdots,n).$

又 $$h=x, k=y.$$

将以上各项代入 n 阶泰勒公式,便得

$$e^{x+y}=1+(x+y)+\frac{1}{2!}(x^2+2xy+y^2)+\frac{1}{3!}(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}(x+y)^n+R_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x+y)^k}{k!}+R_n,$$

其中 $$R_n=\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta(x+y)}\ (0<\theta<1).$$

*习题9-10 最小二乘法

1. 某种合金的含铅量百分比(%)为 p,其熔解温度(℃)为 θ,由实验测得 p 与 θ 的数据如下表:

p/%	36.9	46.7	63.7	77.8	84.0	87.5
θ/℃	181	197	235	270	283	292

试用最小二乘法建立 θ 与 p 之间的经验公式 $\theta=ap+b$.

解　设 M 是各个数据的偏差平方和，即

$$M=\sum_{i=1}^{6}[\theta_i-(ap_i+b)]^2.$$

令
$$\begin{cases}\dfrac{\partial M}{\partial a}=-\sum\limits_{i=1}^{6}2p_i[\theta_i-(ap_i+b)]=0,\\ \dfrac{\partial M}{\partial b}=-\sum\limits_{i=1}^{6}2[\theta_i-(ap_i+b)]=0.\end{cases}$$

整理，得

$$\begin{cases}a\sum\limits_{i=1}^{6}p_i^2+b\sum\limits_{i=1}^{6}p_i=\sum\limits_{i=1}^{6}\theta_ip_i,\\ a\sum\limits_{i=1}^{6}p_i+6b=\sum\limits_{i=1}^{6}\theta_i.\end{cases}$$

计算，得　$\sum\limits_{i=1}^{6}p_i^2=28\,365.28$，$\sum\limits_{i=1}^{6}p_i=396.6$，

$$\sum_{i=1}^{6}\theta_ip_i=101\,176.3,\ \sum_{i=1}^{6}\theta_i=1\,458.$$

代入方程组，得

$$\begin{cases}28\,365.28a+396.6b=101\,176.3,\\ 396.6a+6b=1\,458.\end{cases}$$

解得
$$a=\frac{4\,802.5}{2\,150.02}=2.234,$$

$$b=\frac{572.0}{6}=95.33.$$

所以经验公式为 $\theta=2.234p+95.33$.

2. 已知一组实验数据为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_n,y_n). 现若假定经验公式是

$$y=ax^2+bx+c.$$

试按最小二乘法建立 a、b、c 应满足的三元一次方程组.

解　设 M 是各个数据的偏差平方和，即

$$M=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]^2.$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M}{\partial a}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]\cdot x_i^2=0,\\ \dfrac{\partial M}{\partial b}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]\cdot x_i=0,\\ \dfrac{\partial M}{\partial c}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]=0.\end{cases}$$

整理，得 a、b、c 应满足的三元一次方程组如下：

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^4+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3+c\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+c\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+nc=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i. \end{cases}$$

总习题九

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内：

(1) $f(x,y)$在点(x,y)可微分是$f(x,y)$在该点连续的________条件. $f(x,y)$在点(x,y)连续是$f(x,y)$在该点可微分的________ 条件.

(2) $z=f(x,y)$在点(x,y)的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$存在是$f(x,y)$在该点可微分的________条件. $z=f(x,y)$在点(x,y)可微分是函数在该点的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$存在的________条件.

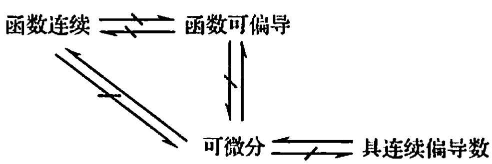
(3) $z=f(x,y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$在点$(x,y)$存在且连续是$f(x,y)$在该点可微分的________条件.

(4) 函数$z=f(x,y)$的两个二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$及$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$在区域$D$内连续是这两个二阶混合偏导数在$D$内相等的________条件.

解 (1)充分，必要. (2)必要，充分.

(3)充分. (4)充分.

注 本题结果给出了二元函数连续、可偏导(两个偏导数均存在)、可微及具有连续偏导数之间的联系，用图表可表示为



2. 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论：

设函数$f(x,y)$在点$(0,0)$的某邻域内有定义，且$f_x(0,0)=3$, $f_y(0,0)=-1$,则有________.

(A) $\mathrm{d}z|_{(0,0)}=3\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.

(B) 曲面 $z=f(x,y)$在点$(0,0,f(0,0))$的一个法向量为$(3,-1,1)$.

(C) 曲线$\begin{cases}z=f(x,y),\\ y=0\end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$的一个切向量为$(1,0,3)$.

(D) 曲线$\begin{cases}z=f(x,y),\\ y=0\end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$的一个切向量为$(3,0,1)$.

解 函数 $f(x,y)$在点$(0,0)$处的两个偏导数存在,不一定可微分,故(A)不对.

曲面 $z=f(x,y)$在点$(0,0,f(0,0))$处的一个法向量是$(3,-1,-1)$,而不是$(3,-1,1)$,故(B)不对.

取 x 为参数,则曲线 $x=x,y=0,z=f(x,0)$在点$(0,0,f(0,0))$处的一个切向量为$(1,0,3)$,故(C)正确.

3. 求函数 $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$的定义域,并求 $\lim\limits_{(x,y)\to\left(\frac{1}{2},0\right)} f(x,y)$.

解 函数的定义域为 $D=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1,y^2\leqslant 4x\}$.

因为点$\left(\dfrac{1}{2},0\right)\in D$,$f(x,y)$为初等函数,所以

$$\lim_{(x,y)\to\left(\frac{1}{2},0\right)} f(x,y)=f\left(\frac{1}{2},0\right)=\frac{\sqrt{2}}{\ln\dfrac{3}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{\ln 3-\ln 4}.$$

*4. 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$不存在.

证 取两条趋于$(0,0)$的路径,$c_1:x=0$,$c_2:y^2=x$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in c_1}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=0;$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in c_2}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y^2=x}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}.$$

由于(x,y)分别沿 c_1、c_2 趋于$(0,0)$时 $f(x,y)$的极限不相等,故

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$不存在.

5. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

求 $f_x(x,y)$及 $f_y(x,y)$.

解 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，

$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy(x^2+y^2)-x^2y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2(x^2+y^2)-x^2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

当 $x^2+y^2=0$ 时，

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0,$$

故

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

6. 求下列函数的一阶和二阶偏导数：

(1) $z=\ln(x+y^2)$； (2) $z=x^y$.

解 (1)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x+y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2(x+y^2)-4y^2}{(x+y^2)^2}=\frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x+y^2}\right)=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}.$$

(2)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(yx^{y-1})=x^{y-1}+y\cdot x^{y-1}\ln x.$$

7. 求函数 $z=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$ 当 $x=2,y=1,\Delta x=0.01,\Delta y=0.03$ 时的全增量和全微分.

解

$$\Delta z=\frac{(2.01)\cdot(1.03)}{(2.01)^2-(1.03)^2}-\frac{2}{3}=0.02.$$

又

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(y^3+x^2y)}{(x^2-y^2)^2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^3+xy^2}{(x^2-y^2)^2},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)}=-\frac{5}{9},\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)}=\frac{10}{9}.$$

故 $$\mathrm{d}z\Big|_{\substack{x=2,\Delta x=0.01\\ y=1,\Delta y=0.03}}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)}\cdot\Delta x+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)}\cdot\Delta y=0.03.$$

*8. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

证明：$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续且偏导数存在，但不可微分.

证 因为 $$0\leqslant\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\leqslant\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}=0,$$

所以 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$$

又 $f(0,0)=0$，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)$，即 $f(x,y)$在点$(0,0)$处连续.

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0.$$

$$\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=\frac{(\Delta x)^2\cdot(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}},$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x}}\frac{\dfrac{(\Delta x)^2\cdot(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}}{\rho}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^4}{[2(\Delta x)^2]^2}=\frac{1}{4}\neq 0,$$

故 $f(x,y)$在点$(0,0)$处偏导数存在，但不可微分.

9. 设 $u=x^y$，而 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$都是可微函数，求$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

解 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=yx^{y-1}\cdot\varphi'(t)+x^y\ln x\cdot\psi'(t).$$

10. 设 $z=f(u,v,w)$具有连续偏导数，而

$$u=\eta-\zeta,v=\zeta-\xi,w=\xi-\eta,$$

求$\dfrac{\partial z}{\partial \xi},\dfrac{\partial z}{\partial \eta},\dfrac{\partial z}{\partial \zeta}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial \xi}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial \xi}=-\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial w},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial \eta}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial w},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial \zeta}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial \zeta}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial \zeta}=-\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}.$$

11. 设 $z=f(u,x,y)$，$u=xe^y$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=f_u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+f_x=f_u\cdot e^y+f_x,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}(f_u\cdot e^y+f_x)=\left(\frac{\partial}{\partial y}f_u\right)\cdot e^y+f_u\cdot e^y+\frac{\partial}{\partial y}f_x\\&=\left(f_{uu}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f_{uy}\right)e^y+f_u\cdot e^y+\left(f_{xu}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f_{xy}\right)\\&=(f_{uu}\cdot xe^y+f_{uy})e^y+f_u\cdot e^y+f_{xu}\cdot xe^y+f_{xy}\\&=xe^{2y}f_{uu}+e^yf_{uy}+xe^yf_{xu}+f_{xy}+e^yf_u.\end{aligned}$$

12. 设 $x=e^u\cos v$，$y=e^u\sin v$，$z=uv$，试求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}$.

分别在 $x=e^u\cos v$，$y=e^u\sin v$ 的两端对 x 求偏导数，得

$$\begin{cases}e^u\cos v\dfrac{\partial u}{\partial x}-e^u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial x}=1,\\ e^u\sin v\dfrac{\partial u}{\partial x}+e^u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0.\end{cases}$$

由以上方程组解得 $\frac{\partial u}{\partial x}=e^{-u}\cos v$，$\frac{\partial v}{\partial x}=-e^{-u}\sin v$.

从而 $$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-u}(v\cos v-u\sin v).$$

同理 $$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}.$$

分别在 $x=e^u\cos v$，$y=e^u\sin v$ 的两端对 y 求偏导数，得

$$\begin{cases}e^u\cos v\dfrac{\partial u}{\partial y}-e^u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\ e^u\sin v\dfrac{\partial u}{\partial y}+e^u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial y}=1.\end{cases}$$

由以上方程组解得 $\frac{\partial u}{\partial y}=e^{-u}\sin v$，$\frac{\partial v}{\partial y}=e^{-u}\cos v$.

从而 $$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-u}(u\cos v+v\sin v).$$

13. 求螺旋线 $x=a\cos\theta$，$y=a\sin\theta$，$z=b\theta$ 在点 $(a,0,0)$ 处的切线及法平面方程.

解 $\frac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta$，$\frac{dy}{d\theta}=a\cos\theta$，$\frac{dz}{d\theta}=b$.

点 $(a,0,0)$ 所对应的参数 $\theta=0$，故曲线在给定点的切向量

$$\boldsymbol{T}=(0,a,b).$$

于是切线方程为

$$\frac{x-a}{0}=\frac{y}{a}=\frac{z}{b},$$

即
$$\begin{cases}x=a,\\ by-az=0.\end{cases}$$

法平面方程为

$$a(y-0)+b(z-0)=0,$$

即
$$ay+bz=0.$$

14. 在曲面 $z=xy$ 上求一点，使这点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$，并写出这法线的方程.

解 设所求点为 $M(x_0,y_0,z_0)$，曲面在该点处的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(y_0,x_0,-1)$，平面的法向量为(1,3,1).

按题意，$\boldsymbol{n}$ 垂直于平面，故有

$$\frac{y_0}{1}=\frac{x_0}{3}=\frac{-1}{1}.$$

求得 $x_0=-3$，$y_0=-1$，$z_0=x_0y_0=3$. 于是所求点为 $M(-3,-1,3)$，法线方程为

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}.$$

15. 设 $\boldsymbol{e}_l=(\cos\theta,\sin\theta)$，求函数

$$f(x,y)=x^2-xy+y^2$$

在点(1,1)沿方向 l 的方向导数，并分别确定角 θ，使这导数有(1)最大值，(2)最小值，(3)等于 0.

解
$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-y,\ \frac{\partial f}{\partial y}=-x+2y,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=1,\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=1.$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1)}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}\cos\theta+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}\sin\theta=\cos\theta+\sin\theta.$$

因为
$$\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right),$$

所以 (1) 当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，方向导数最大，其最大值为$\sqrt{2}$.

(2) 当 $\theta=\frac{5}{4}\pi$ 时，方向导数最小，其最小值为$-\sqrt{2}$.

(3) 当 $\theta=\frac{3}{4}\pi$ 或$\frac{7}{4}\pi$ 时，方向导数为 0.

16. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$处沿外法线方向的方向导数.

解 椭球面在点 M_0 处的沿外法线方向的一个向量为 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2}\right)$,

$$e_n=\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}\left(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2}\right).$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial z}{\partial n}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}&=\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}\left(2x_0\cdot\frac{x_0}{a^2}+2y_0\cdot\frac{y_0}{b^2}+2z_0\cdot\frac{z_0}{c^2}\right)\\&=\frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}.\end{aligned}$$

17. 求平面$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ 和柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线上与 xOy 平面距离最短的点.

解 设交线上的点为 $M(x,y,z)$,它到 xOy 面上距离的平方为 z^2. 问题就成为求函数 z^2 在约束条件$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ 和 $x^2+y^2=1$ 下的最小值问题. 作拉格朗日函数

$$L=z^2+\lambda\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-1\right)+\mu(x^2+y^2-1).$$

令

$$\begin{cases}L_x=\frac{\lambda}{3}+2\mu x=0,\\L_y=\frac{\lambda}{4}+2\mu y=0,\\L_z=2z+\frac{\lambda}{5}=0.\end{cases}$$

又由约束条件,有

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1,$$
$$x^2+y^2=1.$$

解此方程组,得 $x=\frac{4}{5}$,$y=\frac{3}{5}$,$z=\frac{35}{12}$. 于是,得可能的极值点 $M_0\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{35}{12}\right)$. 由问题本身可知,距离最短的点必定存在,因此 M_0 就是所求的点.

18. 在第一卦限内作椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面,使该切平面与三坐

标面所围成的四面体的体积最小. 求这切平面的切点,并求此最小体积.

解 设切点为$M(x_0,y_0,z_0)$,$F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$,

$$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2}\right).$$

曲面在点M处的切平面方程为

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0,$$

即
$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1.$$

于是,切平面在三个坐标轴上的截距依次为$\frac{a^2}{x_0},\frac{b^2}{y_0},\frac{c^2}{z_0}$,切平面与三个坐标面所围成的四面体的体积为

$$V=\frac{1}{6}\cdot\frac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0}.$$

在$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的条件下,求$V$的最小值,即求分母$xyz$的最大值. 作拉格朗日函数

$$L(x,y,z)=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right).$$

令

$$\begin{cases}L_x=yz+\dfrac{2\lambda x}{a^2}=0, & (1)\\ L_y=xz+\dfrac{2\lambda y}{b^2}=0, & (2)\\ L_z=xy+\dfrac{2\lambda z}{c^2}=0. & (3)\end{cases}$$

$(1)\cdot x+(2)\cdot y+(3)\cdot z$,并由约束条件$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$,得

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3},$$

从而

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}},y=\frac{b}{\sqrt{3}},z=\frac{c}{\sqrt{3}}.$$

于是,得可能极值点$M\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$. 由此问题的性质知,所求的切点为$M\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$,四面体的最小体积为

$$V_{\text{最小}} = \frac{\sqrt{3}}{2}abc.$$

19. 某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售，售价分别为 p_1 和 p_2，销售量分别为 q_1 和 q_2，需求函数分别为

$$q_1 = 24 - 0.2p_1, \qquad q_2 = 10 - 0.05p_2,$$

总成本函数为

$$C = 35 + 40(q_1 + q_2).$$

试问：厂家如何确定两个市场的售价，能使其获得的总利润最大？最大总利润为多少？

解法一 总收入函数为

$$R = p_1q_1 + p_2q_2 = 24p_1 - 0.2p_1^2 + 10p_2 - 0.05p_2^2,$$

总利润函数为

$$L = R - C = 32p_1 - 0.2p_1^2 - 0.05p_2^2 + 12p_2 - 1395.$$

由极值的必要条件，得方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial p_1} = 32 - 0.4p_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial p_2} = 12 - 0.1p_2 = 0. \end{cases}$$

解此方程组，得 $p_1=80, p_2=120$.

由问题的实际意义可知，厂家获得总利润最大的市场售价必定存在，故当 $p_1=80, p_2=120$ 时，厂家所获得的总利润最大，其最大总利润为

$$L\Big|_{p_1=80,p_2=120} = 605.$$

解法二 两个市场的价格函数分别为

$$p_1 = 120 - 5q_1, \qquad p_2 = 200 - 20q_2,$$

总收入函数为

$$R = p_1q_1 + p_2q_2 = (120 - 5q_1)q_1 + (200 - 20q_2)q_2,$$

总利润函数为

$$\begin{aligned} L &= R - C = (120 - 5q_1)q_1 + (200 - 20q_2)q_2 - [35 + 40(q_1 + q_2)] \\ &= 80q_1 - 5q_1^2 + 160q_2 - 20q_2^2 - 35. \end{aligned}$$

由极值的必要条件，得方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial q_1} = 80 - 10q_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial q_2} = 160 - 40q_2 = 0. \end{cases}$$

解此方程组得 $q_1=8, q_2=4$.

由问题的实际意义可知，当 $q_1=8,q_2=4$，即 $p_1=80,p_2=120$ 时，厂家所获得的总利润最大，其最大总利润为

$$L\big|_{q_1=8,q_2=4}=605.$$

20. 设有一小山，取它的底面所在的平面为 xOy 坐标面，其底部所占的闭区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\leqslant 75\}$，小山的高度函数为 $h=f(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1) 设 $M(x_0,y_0)\in D$，问 $f(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$，试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式.

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动，为此需要在山脚找一上山坡度最大的点作为攀岩的起点，也就是说，要在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出(1)中的 $g(x,y)$ 达到最大值的点。试确定攀岩起点的位置.

解 (1) 由梯度与方向导数的关系知，$h=f(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处沿梯度

$$\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0)=(y_0-2x_0)\boldsymbol{i}+(x_0-2y_0)\boldsymbol{j}$$

方向的方向导数最大，方向导数的最大值为该梯度的模，所以

$$g(x_0,y_0)=\sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}=\sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0}.$$

(2) 欲在 D 的边界上求 $g(x,y)$ 达到最大值的点，只需求 $F(x,y)=g^2(x,y)=5x^2+5y^2-8xy$ 达到最大值的点。因此，作拉格朗日函数

$$L=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(75-x^2-y^2+xy).$$

令

$$\begin{cases}L_x=10x-8y+\lambda(y-2x)=0, & (1)\\ L_y=10y-8x+\lambda(x-2y)=0. & (2)\end{cases}$$

又由约束条件，有

$$75-x^2-y^2+xy=0. \qquad (3)$$

(1)+(2)，得

$$(x+y)(2-\lambda)=0,$$

解得 $y=-x$ 或 $\lambda=2$.

若 $\lambda=2$，则由(1)得 $y=x$，再由(3)得 $x=y=\pm5\sqrt{3}$.

若 $y=-x$，则由(3)得 $x=\pm5,y=\mp5$.

于是得到四个可能的极值点：

$$M_1(5,-5),\quad M_2(-5,5),\quad M_3(5\sqrt{3},5\sqrt{3}),\quad M_4(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3}).$$

由于 $F(M_1)=F(M_2)=450,F(M_3)=F(M_4)=150$，故 $M_1(5,-5)$ 或 $M_2(-5,5)$ 可作为攀岩的起点.

第十章 重积分

习题10-1 二重积分的概念与性质

1. 设有一平面薄板(不计其厚度),占有 xOy 面上的闭区域 D,薄板上分布有面密度为 $\mu=\mu(x,y)$ 的电荷,且 $\mu(x,y)$ 在 D 上连续,试用二重积分表达该板上的全部电荷 Q.

解 用一组曲线网将 D 分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_i$,其面积也记为 $\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$. 任取一点 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$,则 $\Delta\sigma_i$ 上分布的电荷 $\Delta Q_i\approx\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$. 通过求和、取极限,便得到该板上的全部电荷为

$$Q=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\iint_D\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\sigma_i\text{ 的直径}\}$.

注 以上解题过程也可用元素法简化叙述如下:

设想用曲线网将 D 分成 n 个小闭区域,取出其中任意一个记作 $\mathrm{d}\sigma$(其面积也记作 $\mathrm{d}\sigma$),(x,y) 为 $\mathrm{d}\sigma$ 上一点,则 $\mathrm{d}\sigma$ 上分布的电荷近似等于 $\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma$,记作

$$\mathrm{d}Q=\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma\quad(\text{称为电荷元素}),$$

以 $\mathrm{d}Q$ 作为被积表达式,在 D 上作重积分,即得所求的电荷为

$$Q=\iint_D\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

2. 设 $I_1=\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma$,其中 $D_1=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,-2\leqslant y\leqslant 2\}$;

又 $\quad I_2=\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma$,其中 $D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

试利用二重积分的几何意义说明 I_1 与 I_2 之间的关系.

解 由二重积分的几何意义知,I_1 表示底为 D_1,顶为曲面 $z=(x^2+y^2)^3$ 的曲顶柱体 Ω_1 的体积;I_2 表示底为 D_2、顶为曲面 $z=(x^2+y^2)^3$ 的曲顶柱体 Ω_2 的体积(图 10-1). 由于位于 D_1 上方的曲面 $z=(x^2+y^2)^3$ 关于 yOz 面和 zOx 面均对称,故 yOz 面和 zOx 面将 Ω_1 分成四个等积的部分,其中位于第一卦限的部分即为 Ω_2. 由此可知

$$I_1 = 4I_2.$$

注 (1) 本题也可利用被积函数和积分区域的对称性来解答. 设 $D_3=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,-2\leqslant y\leqslant 2\}$. 由于 D_1 关于 y 轴对称,被积函数 $(x^2+y^2)^3$ 关于 x 是偶函数,故

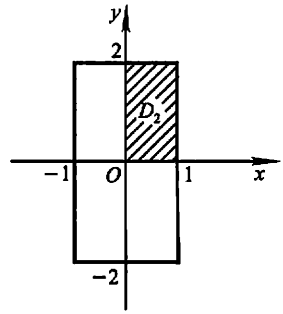


图 10−1

$$I_1=\iint_{D_1}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma=2\iint_{D_3}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma.$$

又由于 D_3 关于 x 轴对称,被积函数 $(x^2+y^2)^3$ 关于 y 是偶函数,故

$$\iint_{D_3}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma=2\iint_{D_2}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma=2I_2.$$

从而得

$$I_1=4I_2.$$

(2) 利用对称性来计算二重积分还有以下两个结论值得注意:

如果积分区域 D 关于 x 轴对称,而被积函数 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数,即 $f(x,-y)=-f(x,y)$,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0;$$

如果积分区域 D 关于 y 轴对称,而被积函数 $f(x,y)$ 关于 x 是奇函数,即 $f(-x,y)=-f(x,y)$,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0.$$

3. 利用二重积分定义证明:

(1) $\iint_D \mathrm{d}\sigma=\sigma$(其中 σ 为 D 的面积);

(2) $\iint_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma=k\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$(其中 k 为常数);

(3) $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$

其中 $D=D_1\cup D_2$,D_1,D_2 为两个无公共内点的闭区域.

证 (1) 由于被积函数 $f(x,y)\equiv 1$,故由二重积分定义得

$$\begin{aligned}\iint_D \mathrm{d}\sigma&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i\\&=\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\sigma.\end{aligned}$$

(2) $\iint_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}kf(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

$$=k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=k\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

(3) 因为函数 $f(x,y)$在闭区域 D 上可积，故不论把 D 怎样分割，积分和的极限总是不变的. 因此在分割 D 时，可以使 D_1 和 D_2 的公共边界永远是一条分割线. 这样 $f(x,y)$在 $D_1\cup D_2$ 上的积分和就等于 D_1 上的积分和加 D_2 上的积分和，记为

$$\sum_{D_1\cup D_2}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\sum_{D_1}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i+\sum_{D_2}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

令所有 $\Delta\sigma_i$ 的直径的最大值 $\lambda\to 0$，上式两端同时取极限，即得

$$\iint_{D_1\cup D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

4. 根据二重积分的性质，比较下列积分的大小：

(1) $\iint_D(x+y)^2\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint_D(x+y)^3\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 是由 x 轴、y 轴与直线 $x+y=1$ 所围成；

(2) $\iint_D(x+y)^2\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint_D(x+y)^3\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 是由圆周 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成；

(3) $\iint_D\ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint_D[\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是三角形闭区域，三顶点分别为(1,0)，(1,1)，(2,0)；

(4) $\iint_D\ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint_D[\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 3\leqslant x\leqslant 5,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

解 (1) 在积分区域 D 上，$0\leqslant x+y\leqslant 1$，故有

$$(x+y)^3\leqslant(x+y)^2.$$

根据二重积分的性质 4，可得

$$\iint_D(x+y)^3\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint_D(x+y)^2\mathrm{d}\sigma.$$

(2) 由于积分区域 D 位于半平面 $\{(x,y)\mid x+y\geqslant 1\}$ 内，故在 D 上有 $(x+y)^2\leqslant(x+y)^3$. 从而 $\iint_D(x+y)^2\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint_D(x+y)^3\mathrm{d}\sigma$.

(3) 由于积分区域 D 位于条形区域 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x+y\leqslant 2\}$ 内，故知区域 D 上的点满足 $0\leqslant\ln(x+y)\leqslant 1$，从而有 $[\ln(x+y)]^2\leqslant\ln(x+y)$. 因此

$$\iint_D[\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint_D\ln(x+y)\mathrm{d}\sigma.$$

(4) 由于积分区域 D 位于半平面 $\{(x,y)\mid x+y\geqslant \mathrm{e}\}$ 内，故在 D 上有 $\ln(x+$

$y)\geqslant 1$,从而$[\ln(x+y)]^2\geqslant\ln(x+y)$. 因此

$$\iint_D[\ln(x+y)]^2 d\sigma\geqslant\iint_D\ln(x+y)d\sigma.$$

5. 利用二重积分的性质估计下列积分的值:

(1) $I=\iint_D xy(x+y)d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$;

(2) $I=\iint_D\sin^2 x\sin^2 y d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant \pi,0\leqslant y\leqslant \pi\}$;

(3) $I=\iint_D(x+y+1)d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\}$;

(4) $I=\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$.

解 (1) 在积分区域 D 上,$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$,从而 $0\leqslant xy(x+y)\leqslant 2$ 又 D 的面积等于 1,因此

$$0\leqslant\iint_D xy(x+y)d\sigma\leqslant 2.$$

(2) 在积分区域 D 上,$0\leqslant\sin x\leqslant 1,0\leqslant\sin y\leqslant 1$,从而 $0\leqslant\sin^2 x\sin^2 y\leqslant 1$,又 D 的面积等于 π^2,因此

$$0\leqslant\iint_D\sin^2 x\sin^2 y d\sigma\leqslant\pi^2.$$

(3) 在积分区域 D 上有 $1\leqslant x+y+1\leqslant 4$,$D$ 的面积等于 2,因此

$$2\leqslant\iint_D(x+y+1)d\sigma\leqslant 8.$$

(4) 因为在积分区域 D 上有 $0\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$,所以有

$$9\leqslant x^2+4y^2+9\leqslant 4(x^2+y^2)+9\leqslant 25.$$

又 D 的面积等于 4π,因此

$$36\pi\leqslant\iint_D(x^2+4y^2+9)d\sigma\leqslant 100\pi.$$

习题10-2 二重积分的计算法

1. 计算下列二重积分:

(1) $\iint_D(x^2+y^2)d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$;

(2) $\iint_D(3x+2y)d\sigma$,其中 D 是由两坐标轴及直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域;

(3) $\iint\limits_D (x^3+3x^2y+y^3)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$;

(4) $\iint\limits_D x\cos(x+y)\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是顶点分别为 $(0,0)$,$(\pi,0)$ 和 (π,π) 的三角形闭区域.

解 (1)
$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-1}^{1}\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(2x^2+\frac{2}{3}\right)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}.$$

(2) D 可用不等式表示为
$$0\leqslant y\leqslant 2-x,0\leqslant x\leqslant 2.$$
于是
$$\iint\limits_D (3x+2y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x}(3x+2y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^2[3xy+y^2]_0^{2-x}\mathrm{d}x=\int_0^2(4+2x-2x^2)\mathrm{d}x=\frac{20}{3}.$$

(3)
$$\iint\limits_D (x^3+3x^2y+y^3)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(x^3+3x^2y+y^3)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\left[\frac{x^4}{4}+x^3y+y^3x\right]_0^1\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\frac{1}{4}+y+y^3\right)\mathrm{d}y=1.$$

(4) D 可用不等式表示为
$$0\leqslant y\leqslant x,0\leqslant x\leqslant \pi.$$
于是
$$\iint\limits_D x\cos(x+y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x\int_0^{x}\cos(x+y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{\pi}x[\sin(x+y)]_0^{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}x(\sin 2x-\sin x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{\pi}x\mathrm{d}\left(\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)$$
$$=\left[x\left(\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\left(\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\mathrm{d}x$$
$$=\pi\left(-1-\frac{1}{2}\right)-0=-\frac{3}{2}\pi.$$

2. 画出积分区域,并计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D x\sqrt{y}\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}$,$y=x^2$ 所围成的闭区域;

(2) $\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 及 y 轴所围成的右半闭区域;

(3) $\iint\limits_D e^{x+y}d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$;

(4) $\iint\limits_D (x^2+y^2-x)d\sigma$,其中 D 是由直线 $y=2, y=x$ 及 $y=2x$ 所围成的闭区域.

解 (1) D 可用不等式表示为

$$x^2\leqslant y\leqslant\sqrt{x}, 0\leqslant x\leqslant 1(\text{图 } 10-2).$$

于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x\sqrt{y}d\sigma &= \int_0^1 x dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\sqrt{y}dy \\ &= \frac{2}{3}\int_0^1 x[y^{\frac{3}{2}}]_{x^2}^{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}\int_0^1 (x^{\frac{7}{4}}-x^4)dx \\ &= \frac{6}{55}.\end{aligned}$$

(2) D 可用不等式表示为

$$0\leqslant x\leqslant\sqrt{4-y^2}, -2\leqslant y\leqslant 2(\text{图 } 10-3),$$

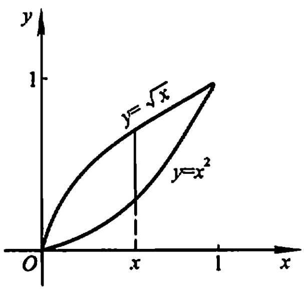


图 10-2

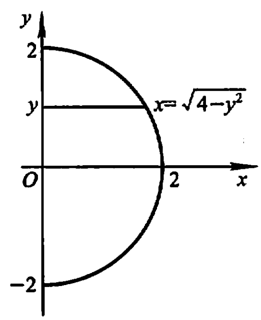


图 10-3

故

$$\begin{aligned}\iint\limits_D xy^2 d\sigma &= \int_{-2}^2 y^2 dy\int_0^{\sqrt{4-y^2}} x dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-2}^2 y^2(4-y^2)dy = \frac{64}{15}.\end{aligned}$$

(3) 如图 10-4, $D=D_1\cup D_2$,其中

$$D_1=\{(x,y)\mid -x-1\leqslant y\leqslant x+1, -1\leqslant x\leqslant 0\};$$
$$D_2=\{(x,y)\mid x-1\leqslant y\leqslant -x+1, 0\leqslant x\leqslant 1\}.$$

因此

$$\iint\limits_D e^{x+y}d\sigma = \iint\limits_{D_1} e^{x+y}d\sigma + \iint\limits_{D_2} e^{x+y}d\sigma$$

$$= \int_{-1}^{0} e^x dx \int_{-x-1}^{x+1} e^y dy + \int_0^1 e^x dx \int_{x-1}^{-x+1} e^y dy$$

$$= \int_{-1}^{0} (e^{2x+1} - e^{-1}) dx + \int_0^1 (e - e^{2x-1}) dx$$

$$= e - e^{-1}.$$

(4) $D: \frac{y}{2} \leqslant x \leqslant y, 0 \leqslant y \leqslant 2$(图 10-5),

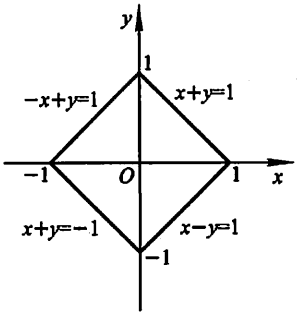


图 10-4

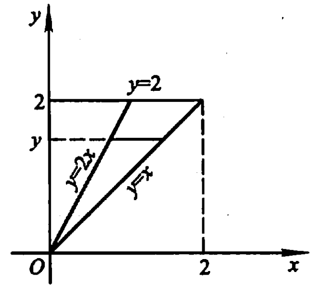


图 10-5

故
$$\iint_D (x^2 + y^2 - x) d\sigma = \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{y} (x^2 + y^2 - x) dx$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x - \frac{x^2}{2} \right]_{\frac{y}{2}}^{y} dy$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{19}{24} y^3 - \frac{3}{8} y^2 \right) dy = \frac{13}{6}.$$

3. 如果二重积分 $\iint_D f(x,y) dx dy$ 的被积函数 $f(x,y)$ 是两个函数 $f_1(x)$ 及 $f_2(y)$ 的乘积,即 $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$,积分区域 $D = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$,证明这个二重积分等于两个单积分的乘积,即

$$\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \left[\int_a^b f_1(x) dx \right] \cdot \left[\int_c^d f_2(y) dy \right].$$

证
$$\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f_1(x) \cdot f_2(y) dy \right] dx.$$

在上式右端的第一次单积分 $\int_c^d f_1(x) \cdot f_2(y) dy$ 中,$f_1(x)$ 与积分变量 y 无关,可视为常数提到积分号外,因此上式右端等于

$$\int_a^b f_1(x) \cdot \left[\int_c^d f_2(y) dy \right] dx.$$

而在这个积分中,由于 $\int_c^d f_2(y) dy$ 为常数,故又可提到积分号外,从而得到

$$\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \left[\int_c^d f_2(y) dy \right] \cdot \left[\int_a^b f_1(x) dx \right]$$

$$=\left[\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\right]\cdot\left[\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\right].$$ 证毕.

4. 化二重积分

$$I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

为二次积分(分别列出对两个变量先后次序不同的两个二次积分),其中积分区域 D 是:

(1) 由直线 $y=x$ 及抛物线 $y^2=4x$ 所围成的闭区域;

(2) 由 x 轴及半圆周 $x^2+y^2=r^2(y\geqslant 0)$ 所围成的闭区域;

(3) 由直线 $y=x,x=2$ 及双曲线 $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$ 所围成的闭区域;

(4) 环形闭区域 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$.

解 (1) 直线 $y=x$ 及抛物线 $y^2=4x$ 的交点为(0,0)和(4,4)(图 10-6). 于是

$$I=\int_0^4\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{4x}}f(x,y)\mathrm{d}y,$$

或

$$I=\int_0^4\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{4}}^{y}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(2) 将 D 用不等式表示为 $0\leqslant y\leqslant\sqrt{r^2-x^2},-r\leqslant x\leqslant r$,于是可将 I 化为如下的先对 y、后对 x 的二次积分:

$$I=\int_{-r}^{r}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y;$$

如将 D 用不等式表示为 $-\sqrt{r^2-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{r^2-y^2},0\leqslant y\leqslant r$,则可将 I 化为如下的先对 x、后对 y 的二次积分:

$$I=\int_0^r\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(3) 如图 10-7. 三条边界曲线两两相交,先求得 3 个交点为(1,1),$\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$和(2,2). 于是

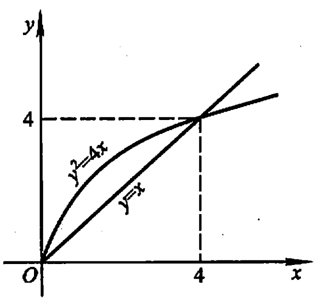


图 10-6

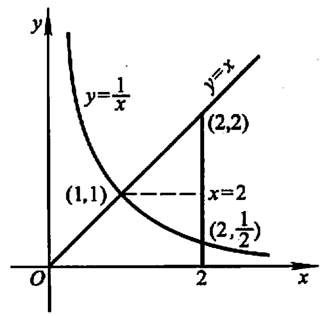


图 10-7

$$I=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)dy;$$

或

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1} dy\int_{\frac{1}{y}}^{2} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_y^2 f(x,y)dx.$$

注 本题说明，将二重积分化为二次积分时，需注意根据积分区域的边界曲线的情况，选取恰当的积分次序. 本题中的积分区域 D 的上、下边界曲线均分别由一个方程给出，而左边界曲线却分为两段，由两个不同的方程给出，在这种情况下采取先对 y、后对 x 的积分次序比较有利，这样只需做一个二次积分，而如果采用相反的积分次序则需计算两个二次积分.

需要指出，选择积分次序时，还需考虑被积函数 $f(x,y)$ 的特点. 具体例子可见教材下册第 141 页上的例 2.

(4) 将 D 按图 10−8(a)和图 10−8(b)的两种不同方式划分为 4 块，分别得

$$I=\int_{-2}^{-1} dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy+\int_{-1}^{1} dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy+$$
$$\int_{-1}^{1} dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy,$$

和

$$I=\int_{-2}^{-1} dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx+\int_{-1}^{1} dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx+$$
$$\int_{-1}^{1} dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx.$$

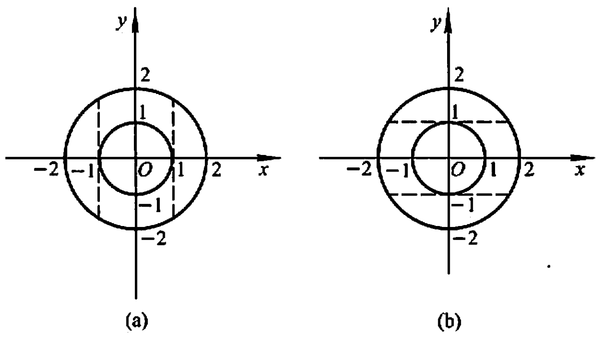


图 10−8

5. 设 $f(x,y)$ 在 D 上连续，其中 D 是由直线 $y=x$、$y=a$ 及 $x=b(b>a)$ 所围成的闭区域，证明

$$\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)dy=\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)dx.$$

证 等式两端的二次积分均等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，因而它们相等.

6. 改换下列二次积分的积分次序：

(1) $\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)dx$；　　(2) $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx$；

(3) $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$；　　(4) $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$；

(5) $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy$；　　(6) $\int_0^\pi dx \int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x} f(x,y)dy$.

解　(1) 所给二次积分等于二重积分$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，其中$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant y, 0\leqslant y\leqslant 1\}$. D可改写为$\{(x,y)\mid x\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant x\leqslant 1\}$(图 10－9)，于是

$$原式=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x,y)dy.$$

(2) 所给二次积分等于二重积分$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，其中$D=\{(x,y)\mid y^2\leqslant x\leqslant 2y, 0\leqslant y\leqslant 2\}$. 又$D$可表示为$\left\{(x,y)\mid \frac{x}{2}\leqslant y\leqslant\sqrt{x}, 0\leqslant x\leqslant 4\right\}$(图 10－10)，因此

$$原式=\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.$$

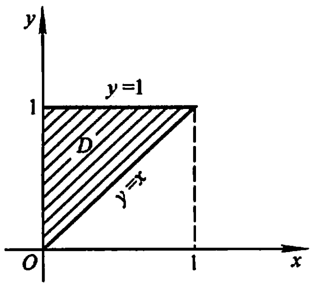


图 10－9

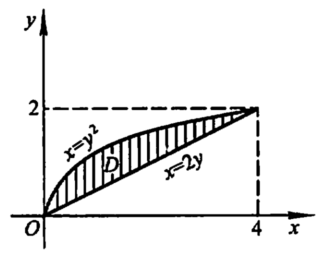


图 10－10

(3) 所给二次积分等于二重积分$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，其中$D=\{(x,y)\mid -\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2}, 0\leqslant y\leqslant 1\}$. 又$D$可表示为$\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}, -1\leqslant x\leqslant 1\}$(图 10－11)，因此

$$原式=\int_{-1}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$$

(4) 所给二次积分等于二重积分$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，其中$D=\{(x,y)\mid 2-x\leqslant y\leqslant\sqrt{2x-x^2}, 1\leqslant x\leqslant 2\}$. 又$D$可表示为$\{(x,y)\mid 2-y\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{1-y^2}, 0\leqslant y\leqslant 1\}$(图 10－12)，故

$$原式=\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$$

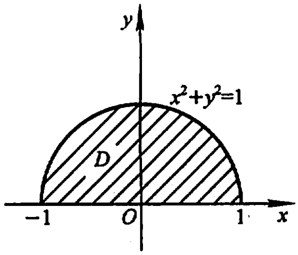


图 10−11

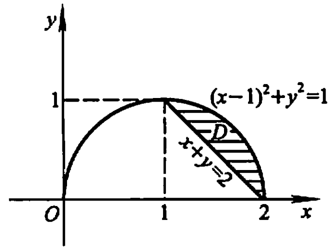


图 10−12

(5) 所给二次积分等于二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$,其中$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant \ln x,1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}\}$. 又 D 可表示为$\{(x,y)\mid \mathrm{e}^y\leqslant x\leqslant \mathrm{e},0\leqslant y\leqslant 1\}$(图 10−13),故

$$原式=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

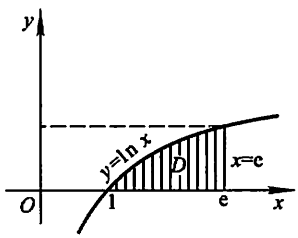


图 10−13

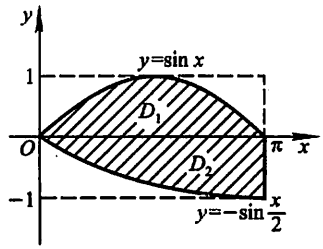


图 10−14

(6) 如图 10−14,将积分区域 D 表示为 $D_1\cup D_2$,其中 $D_1=\{(x,y)\mid \arcsin y\leqslant x\leqslant \pi-\arcsin y,0\leqslant y\leqslant 1\}$①,$D_2=\{(x,y)\mid -2\arcsin y\leqslant x\leqslant \pi,-1\leqslant y\leqslant 0\}$. 于是

$$原式=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_{-2\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

7. 设平面薄片所占的闭区域 D 由直线 $x+y=2$, $y=x$ 和 x 轴所围成,它的面密度 $\mu(x,y)=x^2+y^2$,求该薄片的质量.

解 D 如图 10−15 所示.

$$\begin{aligned}M&=\iint\limits_D\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{2-y}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left[\frac{1}{3}x^3+xy^2\right]_y^{2-y}\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\left[\frac{1}{3}(2-y)^3+2y^2-\frac{7}{3}y^3\right]\mathrm{d}y\end{aligned}$$

① 当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时,$y=\sin x$ 的反函数是 $x=\arcsin y$. 而当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$时,$\pi-x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. 于是由 $y=\sin x=\sin(\pi-x)$ 可得 $\pi-x=\arcsin y$,从而得反函数 $x=\pi-\arcsin y$.

$$=\left[-\frac{1}{12}(2-y)^4+\frac{2}{3}y^3-\frac{7}{12}y^4\right]_0^1=\frac{4}{3}.$$

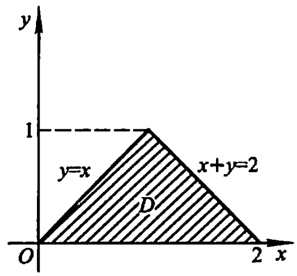


图 10－15

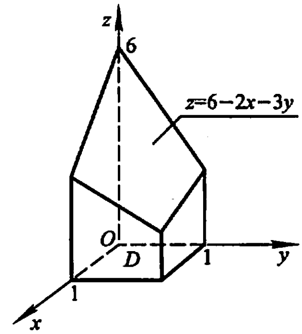


图 10－16

8. 计算由四个平面 $x=0,y=0,x=1,y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 截得的立体的体积.

解 此立体为一曲顶柱体,它的底是 xOy 面上的闭区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$,顶是曲面 $z=6-2x-3y$(图 10－16). 因此所求立体的体积

$$V=\iint_D(6-2x-3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(6-2x-3y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left(\frac{9}{2}-2x\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{2}.$$

9. 求由平面 $x=0,y=0,x+y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及抛物面 $x^2+y^2=6-z$ 截得的立体的体积.

解 此立体为一曲顶柱体,它的底是 xOy 面上的闭区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1-x,0\leqslant x\leqslant 1\}$,顶是曲面 $z=6-(x^2+y^2)$(图 10－17),故体积

$$V=\iint_D[6-(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(6-x^2-y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left[6(1-x)-x^2+x^3-\frac{1}{3}(1-x)^3\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{17}{6}.$$

10. 求由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积.

解 由 $\begin{cases}z=x^2+2y^2\\ z=6-2x^2-y^2\end{cases}$ 消去 z,得 $x^2+y^2=2$,故所求立体在 xOy 面上的投影区域为

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}(\text{图 }10-18).$$

所求立体的体积等于两个曲顶柱体体积的差:

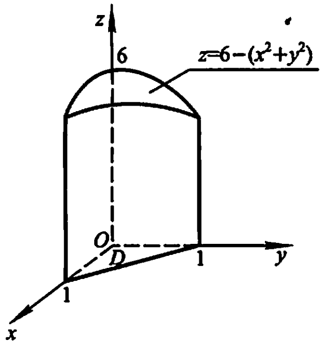


图 10－17

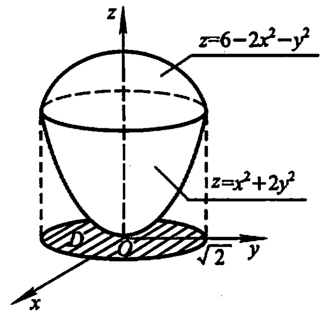


图 10－18

$$
\begin{aligned}
V &= \iint\limits_D (6-2x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma - \iint\limits_D (x^2+2y^2)\mathrm{d}\sigma \\
&= \iint\limits_D (6-3x^2-3y^2)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D (6-3\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(6-3\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho = 6\pi.
\end{aligned}
$$

注 求类似于第 8、9、10 题中这样的立体体积时，并不一定要画出立体的准确图形，但一定要会求出立体在坐标面上的投影区域，并知道立体的底和顶的方程，这就需要复习和掌握第八章中学过的空间解析几何的有关知识.

11. 画出积分区域，把积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示为极坐标形式的二次积分，其中积分区域 D 是：

(1) $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant a^2\}(a>0)$；

(2) $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 2x\}$；

(3) $\{(x,y) \mid a^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant b^2\}$，其中 $0<a<b$；

(4) $\{(x,y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1-x, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

解 (1) 如图 10－19，在极坐标系中，$D=\{(\rho,\theta) \mid 0\leqslant\rho\leqslant a, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$，故

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.
\end{aligned}
$$

(2) 如图 10－20，在极坐标系中，

$$D=\left\{(\rho,\theta) \mid 0\leqslant\rho\leqslant 2\cos\theta, -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}，故$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

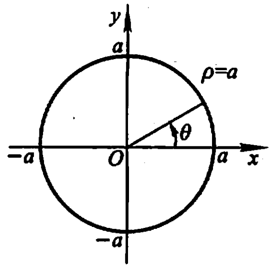


图 10－19

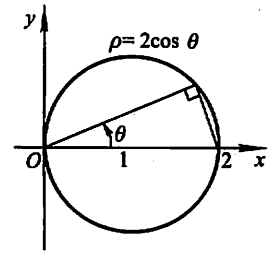


图 10－20

(3) 如图 10－21，在极坐标系中，

$D=\{(\rho,\theta)\,|\,a\leqslant\rho\leqslant b,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$，故

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_a^b f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

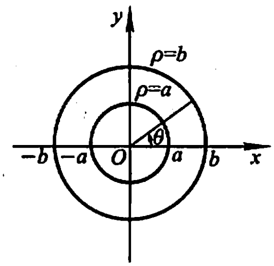


图 10－21

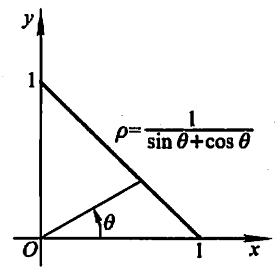


图 10－22

(4) D 如图 10－22 所示. 在极坐标系中，直线 $x+y=1$ 的方程为 $\rho=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$，故 $D=\left\{(\rho,\theta)\;\middle|\;0\leqslant\rho\leqslant\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta},0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$. 于是

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

12. 化下列二次积分为极坐标形式的二次积分：

(1) $\int_0^1dx\int_0^1f(x,y)dy$；　　(2) $\int_0^2dx\int_x^{\sqrt{3}x}f(\sqrt{x^2+y^2})dy$；

(3) $\int_0^1dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$；　　(4) $\int_0^1dx\int_0^{x^2}f(x,y)dy$.

解　(1) 如图 10－23，用直线 $y=x$ 将积分区域 D 分成 D_1、D_2 两部分：

$$D_1=\left\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant\sec\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\};$$

$$D_2=\left\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant\csc\theta,\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}.$$

于是

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sec\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\csc\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

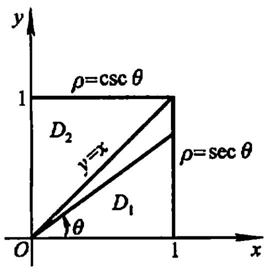


图 10−23

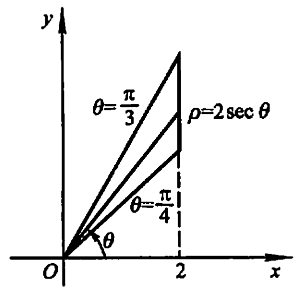


图 10−24

(2) D 如图 10−24 所示. 在极坐标系中,直线 $x=2,y=x$ 和 $y=\sqrt{3}x$ 的方程分别是 $\rho=2\sec\theta,\theta=\frac{\pi}{4}$ 和 $\theta=\frac{\pi}{3}$. 因此

$$D=\left\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant 2\sec\theta,\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\right\}.$$

又,$f(\sqrt{x^2+y^2})=f(\rho)$. 于是

$$\text{原式}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sec\theta}f(\rho)\rho\mathrm{d}\rho.$$

(3) D 如图 10−25 所示. 在极坐标系中,直线 $y=1-x$ 的方程为 $\rho=\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$,圆 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的方程为 $\rho=1$,因此

$$D=\left\{(\rho,\theta)\mid \frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\leqslant\rho\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

于是

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

(4) D 如图 10−26 所示. 在极坐标系中,直线 $x=1$ 的方程是 $\rho=\sec\theta$;抛物线 $y=x^2$ 的方程是 $\rho\sin\theta=\rho^2\cos^2\theta$,即 $\rho=\tan\theta\sec\theta$;两者的交点与原点的连线的方程是 $\theta=\frac{\pi}{4}$. 故

$$D=\left\{(\rho,\theta)\mid \tan\theta\sec\theta\leqslant\rho\leqslant\sec\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\},$$

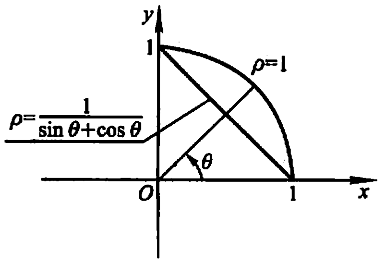


图 10－25

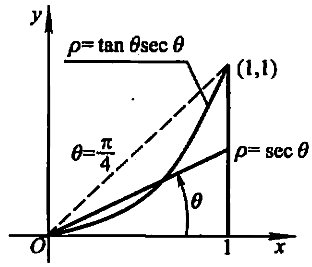


图 10－26

于是

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\tan\theta\sec\theta}^{\sec\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

13. 把下列积分化为极坐标形式，并计算积分值：

(1) $\int_0^{2a}dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2+y^2)dy$；　　(2) $\int_0^a dx\int_0^x\sqrt{x^2+y^2}dy$；

(3) $\int_0^1 dx\int_{x^2}^x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}dy$；　　(4) $\int_0^a dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}(x^2+y^2)dx$.

解 (1) 积分区域 D 如图 10－27 所示. 在极坐标系中，

$$D=\left\{(\rho,\theta)\,|\,0\leqslant\rho\leqslant 2a\cos\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

于是

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho^2\cdot\rho d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{2a\cos\theta}d\theta$$

$$=4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=4a^4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi a^4.$$

注 在多元函数积分学的计算题中，常会遇到定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta d\theta$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta d\theta$. 因此记住如下的结果是很有益的：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta d\theta\left(=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta d\theta\right)=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},n\text{ 为正偶数},\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3},n\text{ 为大于 1 的正奇数}.\end{cases}$$

(2) 如图 10－28，在极坐标系中，

$$D=\left\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant a\sec\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}.$$

于是

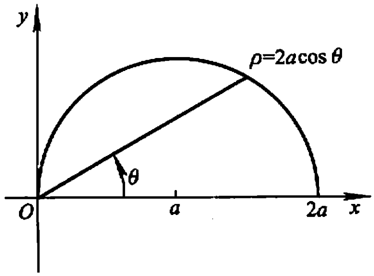


图 10-27

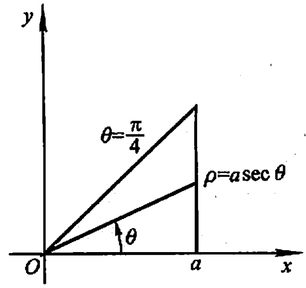


图 10-28

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sec\theta}\rho\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{a^3}{6}[\sec\theta\tan\theta+\ln(\sec\theta+\tan\theta)]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{a^3}{6}[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)].$$

(3) 积分区域 D 如图 10-29 所示. 在极坐标系中,抛物线 $y=x^2$ 的方程是 $\rho\sin\theta=\rho^2\cos^2\theta$,即 $\rho=\tan\theta\sec\theta$;直线 $y=x$ 的方程是 $\theta=\frac{\pi}{4}$,故

$$D=\left\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant\tan\theta\sec\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}.$$

于是

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\tan\theta\sec\theta}\frac{1}{\rho}\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan\theta\sec\theta\mathrm{d}\theta=[\sec\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}-1.$$

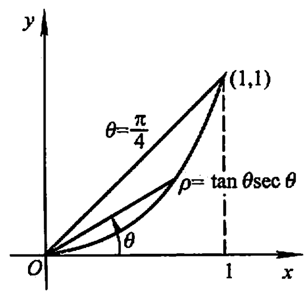


图 10-29

(4) 积分区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\sqrt{a^2-y^2},0\leqslant y\leqslant a\}$

$$=\left\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant a,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

故

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a^4}{4}=\frac{\pi}{8}a^4.$$

14. 利用极坐标计算下列各题:

(1) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域;

(2) $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域；

(3) $\iint\limits_D \arctan\dfrac{y}{x}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$，$x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0$，$y=x$ 所围成的在第一象限内的闭区域.

解 (1) 在极坐标系中，积分区域 $D=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant 2, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$，于是

$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D e^{\rho^2}\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 e^{\rho^2}\cdot\rho\mathrm{d}\rho=2\pi\cdot\left[\frac{e^{\rho^2}}{2}\right]_0^2=\pi(e^4-1).$$

(2) 在极坐标系中，积分区域 $D=\left\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$，于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma&=\iint\limits_D \ln(1+\rho^2)\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\ln(1+\rho^2)\cdot\rho\mathrm{d}\rho\\&=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+\rho^2)\mathrm{d}(1+\rho^2)\\&=\frac{\pi}{4}\left[(1+\rho^2)\ln(1+\rho^2)\Big|_0^1-\int_0^1 2\rho\mathrm{d}\rho\right]\\&=\frac{\pi}{4}(2\ln 2-1).\end{aligned}$$

(3) 在极坐标系中，积分区域 $D=\left\{(\rho,\theta)\mid 1\leqslant\rho\leqslant 2, 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right\}$，$\arctan\dfrac{y}{x}=\theta$，于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma&=\iint\limits_D \theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\mathrm{d}\theta\int_1^2\rho\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{2}(2^2-1)\\&=\frac{3}{64}\pi^2.\end{aligned}$$

15. 选用适当的坐标计算下列各题：

(1) $\iint\limits_D \dfrac{x^2}{y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $x=2$，$y=x$ 及曲线 $xy=1$ 所围成的闭区域；

(2) $\iint\limits_D \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域；

(3) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=x+a$，$y=a$，$y=3a(a>0)$ 所围成的闭区域；

(4) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是圆环形闭区域 $\{(x,y)\mid a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\}$.

解 (1) D 如图 10－30 所示. 根据 D 的形状，选用直角坐标较宜. $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{1}{x}\leqslant y\leqslant x, 1\leqslant x\leqslant 2\right\}$，故

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^2(-x+x^3)\mathrm{d}x=\frac{9}{4}.$$

(2) 根据积分区域 D 的形状和被积函数的特点，选用极坐标为宜. $D=\left\{(\rho,\theta)\,|\,0\leqslant\rho\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$，故

$$原式=\iint\limits_D\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^1\frac{1-\rho^2}{\sqrt{1-\rho^4}}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}\left(\int_0^1\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^4}}\mathrm{d}\rho-\int_0^1\frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^4}}\mathrm{d}\rho\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-\rho^4}}\mathrm{d}\rho^2+\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-\rho^4}}\mathrm{d}(1-\rho^4)\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\arcsin\rho^2\Big|_0^1+\frac{1}{2}\sqrt{1-\rho^4}\Big|_0^1\right]$$

$$=\frac{\pi}{8}(\pi-2).$$

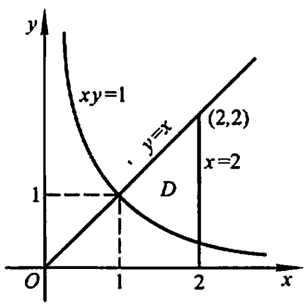


图 10－30

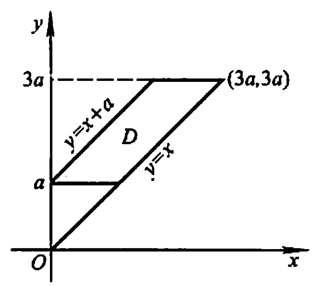


图 10－31

(3) D 如图 10－31 所示. 选用直角坐标为宜. 又根据 D 的边界曲线的情况，宜采用先对 x、后对 y 的积分次序. 于是

$$\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_a^{3a}\mathrm{d}y\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^{3a}\left(2ay^2-a^2y+\frac{a^3}{3}\right)\mathrm{d}y=14a^4.$$

(4) 本题显然适于用极坐标计算. $D=\{(\rho,\theta)\,|\,a\leqslant\rho\leqslant b, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$.

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \rho\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_a^b\rho^2\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{3}(b^3-a^3)=\frac{2}{3}\pi(b^3-a^3).$$

16. 设平面薄片所占的闭区域 D 由螺线 $\rho=2\theta$ 上一段弧 $\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 与直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 所围成，它的面密度为 $\mu(x,y)=x^2+y^2$. 求这薄片的质量.

解　薄片的质量为它的面密度在薄片所占区域 D 上的二重积分(图 10−32)，即

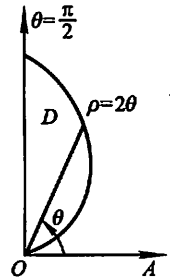


图 10−32

$$M=\iint\limits_D \mu(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint\limits_D \rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^4\mathrm{d}\theta=\frac{\pi^5}{40}.$$

17. 求由平面 $y=0,y=kx(k>0),z=0$ 以及球心在原点、半径为 R 的上半球面所围成的在第一卦限内的立体的体积.

解　如图 10−33，

$$V=\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \sqrt{R^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^\alpha\mathrm{d}\theta\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho=\alpha\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\mathrm{d}(R^2-\rho^2)$$

$$=\frac{\alpha R^3}{3}=\frac{R^3}{3}\arctan k.$$

18. 计算以 xOy 面上的圆周 $x^2+y^2=ax$ 围成的闭区域为底，而以曲面 $z=x^2+y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积.

解　如图 10−34，设

$$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant\sqrt{ax-x^2},0\leqslant x\leqslant a\}$$

$$=\left\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant a\cos\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

由于曲顶柱体关于 xOz 面对称，故

$$V=2\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint\limits_{D_1}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta=\frac{a^4}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{32}\pi a^4.$$

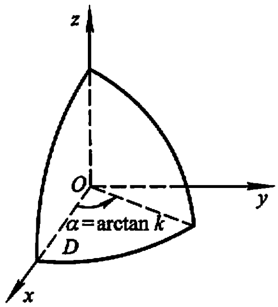


图 10－33

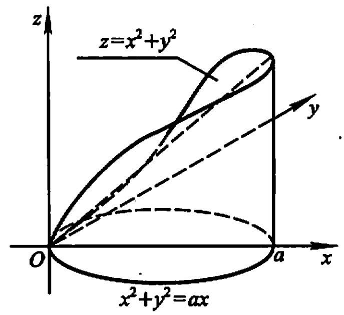


图 10－34

注 在计算立体体积时，要注意充分利用图形的对称性，这样既能简化运算，也能减少错误.

*19. 作适当的变换，计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D (x-y)^2\sin^2(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是平行四边形闭区域，它的四个顶点是 $(\pi,0)$，$(2\pi,\pi)$，$(\pi,2\pi)$ 和 $(0,\pi)$；

(2) $\iint\limits_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由两条双曲线 $xy=1$ 和 $xy=2$，直线 $y=x$ 和 $y=4x$ 所围成的在第Ⅰ象限内的闭区域；

(3) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 x 轴、y 轴和直线 $x+y=1$ 所围成的闭区域；

(4) $\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$.

解 (1) 令 $u=x-y$，$v=x+y$，则 $x=\frac{u+v}{2}$，$y=\frac{v-u}{2}$. 在这变换下，D 的边界 $x-y=-\pi$，$x+y=\pi$，$x-y=\pi$，$x+y=3\pi$ 依次与 $u=-\pi$，$v=\pi$，$u=\pi$，$v=3\pi$ 对应. 后者构成 uOv 平面上与 D 对应的闭区域 D' 的边界. 于是

$$D'=\{(u,v)\mid -\pi\leqslant u\leqslant\pi,\pi\leqslant v\leqslant 3\pi\}\text{(图 10－35)}.$$

又
$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2},$$

因此

$$\iint\limits_D (x-y)^2\sin^2(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}u^2\sin^2 v\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

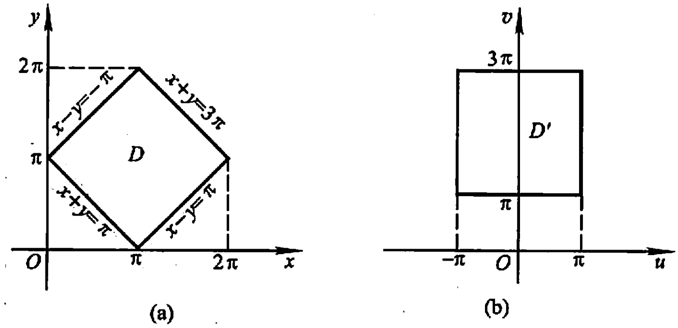


图 10−35

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}u^2\mathrm{d}u\int_{\pi}^{3\pi}\sin^2 v\,\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi}\cdot\left[\frac{v}{2}-\frac{\sin 2v}{4}\right]_{\pi}^{3\pi}$$

$$=\frac{\pi^4}{3}.$$

(2) 令 $u=xy, v=\dfrac{y}{x}$，则 $x=\sqrt{\dfrac{u}{v}}, y=\sqrt{uv}$. 在这变换下，$D$ 的边界 $xy=1$, $y=x, xy=2, y=4x$ 依次与 $u=1, v=1, u=2, v=4$ 对应，后者构成 uOv 平面上与 D 对应的闭区域 D' 的边界. 于是 $D'=\{(u,v)\mid 1\leqslant u\leqslant 2, 1\leqslant v\leqslant 4\}$(图 10−36). 又

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}}\\ \dfrac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \dfrac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{v}\right)=\frac{1}{2v}.$$

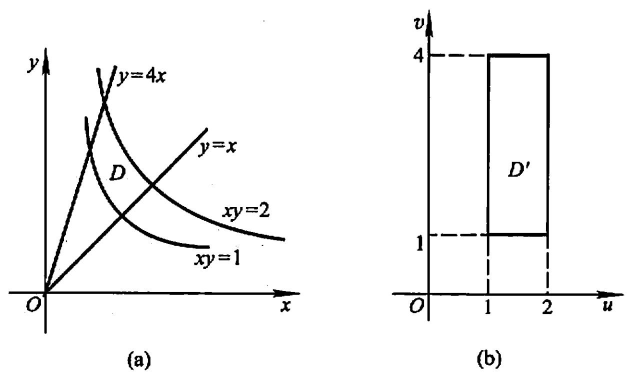


图 10−36

因此

$$\iint_D x^2y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}u^2\cdot\frac{1}{2v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_1^2 u^2\,\mathrm{d}u\int_1^4\frac{1}{v}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{7}{3}\ln 2.$$

(3) 令 $u=x+y, v=y$，即 $x=u-v, y=v$，则在这变换下，D 的边界 $y=0$，$x=0, x+y=1$ 依次与 $v=0, u=v, u=1$ 对应. 后者构成 uOv 平面上与 D 对应的闭区域 D' 的边界，于是

$$D'=\{(u,v)\mid 0\leqslant v\leqslant u, 0\leqslant u\leqslant 1\}.$$

又
$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1.$$

因此
$$\iint_D e^{\frac{y}{x+y}}dxdy=\iint_{D'}e^{\frac{v}{u}}du\,dv$$
$$=\int_0^1 du\int_0^u e^{\frac{v}{u}}dv=\int_0^1 u(e-1)du$$
$$=\frac{1}{2}(e-1).$$

(4) 作广义极坐标变换 $\begin{cases}x=a\rho\cos\theta,\\ y=b\rho\sin\theta\end{cases}(a>0, b>0, \rho\geqslant 0, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$. 在此变换下，与 D 对应的闭区域为 $D'=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$. 又

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=\begin{vmatrix}a\cos\theta & -a\rho\sin\theta\\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta\end{vmatrix}=ab\rho.$$

故
$$\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy=\iint_{D'}\rho^2\cdot ab\rho d\rho d\theta$$
$$=ab\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^3 d\rho=\frac{1}{2}ab\pi.$$

*20. 求由下列曲线所围成的闭区域 D 的面积：

(1) D 是由曲线 $xy=4, xy=8, xy^{3\prime}=5, xy^3=15$ 所围成的第Ⅰ象限部分的闭区域；

(2) D 是由曲线 $y=x^3, y=4x^3, x=y^3, x=4y^3$ 所围成的第Ⅰ象限部分的闭区域.

解 (1) 令 $u=xy, v=xy^3(x\geqslant 0, y\geqslant 0)$，则 $x=\sqrt{\frac{u^3}{v}}, y=\sqrt{\frac{v}{u}}$. 在这变换下，与 D 对应的 uOv 平面上的闭区域为 $D'=\{(u,v)\mid 4\leqslant u\leqslant 8, 5\leqslant v\leqslant 15\}$.

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{3}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u^3}{v^3}}\\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u^3}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{uv}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2v},$$

于是所求面积为

$$A=\iint_D dxdy=\iint_{D'}\frac{1}{2v}du\,dv=\frac{1}{2}\int_4^8 du\int_5^{15}\frac{1}{v}dv$$

$= 2\ln 3.$

(2) 令 $u=\dfrac{y}{x^3}, v=\dfrac{x}{y^3}(x>0, y>0)$，则 $x=u^{-\frac{3}{8}}v^{-\frac{1}{8}}, y=u^{-\frac{1}{8}}v^{-\frac{3}{8}}$. 在这变换下，与 D 对应的 uOv 平面上的闭区域为 $D'=\{(u,v)\mid 1\leqslant u\leqslant 4, 1\leqslant v\leqslant 4\}$. 又

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} -\dfrac{3}{8}u^{-\frac{11}{8}}v^{-\frac{1}{8}} & -\dfrac{1}{8}u^{-\frac{3}{8}}v^{-\frac{9}{8}} \\ -\dfrac{1}{8}u^{-\frac{9}{8}}v^{-\frac{3}{8}} & -\dfrac{3}{8}u^{-\frac{1}{8}}v^{-\frac{11}{8}} \end{vmatrix}=\frac{1}{8}u^{-\frac{3}{2}}v^{-\frac{3}{2}}.$$

于是所求面积为

$$A=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}\frac{1}{8}u^{-\frac{3}{2}}v^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{8}\int_1^4 u^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}u\int_1^4 v^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}v$$
$$=\frac{1}{8}\left(\left[-2u^{-\frac{1}{2}}\right]_1^4\right)^2=\frac{1}{8}.$$

*21. 设闭区域 D 是由直线 $x+y=1, x=0, y=0$ 所围成，求证

$$\iint\limits_{D}\cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\sin 1.$$

证　令 $u=x-y, v=x+y$，则 $x=\dfrac{u+v}{2}, y=\dfrac{v-u}{2}$，在此变换下，$D$ 的边界 $x+y=1, x=0, y=0$ 依次与 $v=1, u+v=0$ 和 $v-u=0$ 对应. 后者构成 uOv 平面上与 D 对应的闭区域 D' 的边界(图 10-37). 于是

$$D'=\{(u,v)\mid -v\leqslant u\leqslant v, 0\leqslant v\leqslant 1\}.$$

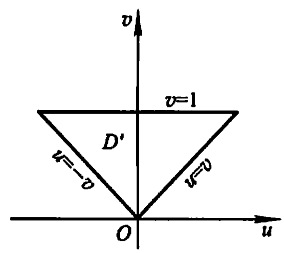


图 10-37

又

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{1}{2},$$

因此有

$$\iint\limits_{D}\cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}\cos\frac{u}{v}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}v\int_{-v}^{v}\cos\frac{u}{v}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^1 v\left[\sin\frac{u}{v}\right]_{-v}^{v}\mathrm{d}v$$
$$=\int_0^1 v\sin 1\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\sin 1.$$ 证毕.

*22. 选取适当的变换，证明下列等式：

(1) $\iint\limits_{D}f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u$，其中闭区域 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$；

(2) $\iint\limits_D f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\mathrm{d}u$, 其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，且 $a^2+b^2\neq 0$.

证 (1) 闭区域 D 的边界为 $x+y=-1,x+y=1,x-y=-1,x-y=1$，故令 $u=x+y,v=x-y$，即 $x=\frac{u+v}{2},y=\frac{u-v}{2}$. 在此变换下，$D$ 变为 uOv 平面上的闭区域

$$D'=\{(u,v)\mid -1\leqslant u\leqslant 1,-1\leqslant v\leqslant 1\}.$$

又

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2},$$

于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{D'}f(u)\left|-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u\int_{-1}^{1}\mathrm{d}v=\int_{-1}^{1}f(u)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$ 证毕.

(2) 比较等式的两端可知需作变换

$$u\sqrt{a^2+b^2}=ax+by,\text{即 } u=\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

再考虑到 D 的边界曲线为 $x^2+y^2=1$，故令 $v=\frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 这样就有 $u^2+v^2=1$，即 D 的边界曲线 $x^2+y^2=1$ 变为 uOv 平面上的圆 $u^2+v^2=1$. 于是与 D 对应的闭区域为 $D'=\{(u,v)\mid u^2+v^2\leqslant 1\}$.

又由 u、v 的表达式可解得

$$x=\frac{au+bv}{\sqrt{a^2+b^2}},y=\frac{bu-av}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

因此雅可比式

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{vmatrix}=-1,$$

于是

$$\iint\limits_D f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\ |-1|\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\mathrm{d}v$$

$$=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\mathrm{d}u.$$

证毕.

习题 10-3 三重积分

1. 化三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为三次积分,其中积分区域 Ω 分别是:

(1) 由双曲抛物面 $xy=z$ 及平面 $x+y-1=0$, $z=0$ 所围成的闭区域;

(2) 由曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 所围成的闭区域;

(3) 由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=2-x^2$ 所围成的闭区域;

(4) 由曲面 $cz=xy(c>0)$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域.

解 (1) Ω 的顶 $z=xy$ 和底面 $z=0$ 的交线为 x 轴和 y 轴,故 Ω 在 xOy 面上的投影区域由 x 轴、y 轴和直线 $x+y-1=0$ 所围成. 于是 Ω 可用不等式表示为

$$0\leqslant z\leqslant xy, 0\leqslant y\leqslant 1-x, 0\leqslant x\leqslant 1,$$

因此

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{xy}f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

(2) 由 $z=x^2+y^2$ 和 $z=1$ 得 $x^2+y^2=1$,所以 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $x^2+y^2\leqslant 1$(图 10-38). Ω 可用不等式表示为

$$x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1, -\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}, -1\leqslant x\leqslant 1,$$

因此

$$I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{1}f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

(3) 由 $\begin{cases}z=x^2+2y^2\\ z=2-x^2\end{cases}$ 消去 z,得 $x^2+y^2=1$. 故 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $x^2+y^2\leqslant 1$(图 10-39). 于是 Ω 可用不等式表示为

$$x^2+2y^2\leqslant z\leqslant 2-x^2, -\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}, -1\leqslant x\leqslant 1,$$

因此

$$I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{x^2-2y^2}^{2-x^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

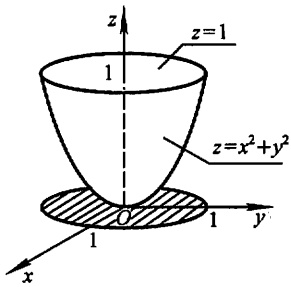


图 10－38

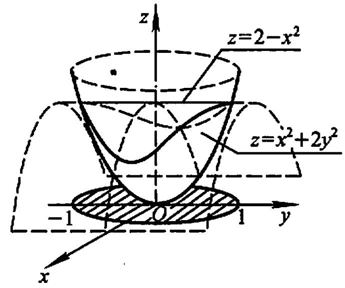


图 10－39

(4) 显然 Ω 在 xOy 面上的投影区域由椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$和 x 轴、y 轴所围成，Ω 的顶为 $cz=xy$，底为 $z=0$(图 10－40). 故 Ω 可用不等式表示为

$$0\leqslant z\leqslant \frac{xy}{c},0\leqslant y\leqslant b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},0\leqslant x\leqslant a,$$

因此

$$I=\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{xy}{c}}f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

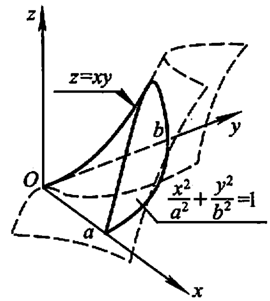


图 10－40

注 本题中的 4 个小题，除第 2 小题外，Ω 的图形都不易画出. 但是，为确定三次积分的积分限，并非必须画出 Ω 的准确图形. 重要的是要会求出 Ω 在坐标面上的投影区域，以及会定出 Ω 的顶和底面，而做到这点，只需掌握常见曲面的方程和图形特点，并具备一定的空间想像能力即可. 本章题解中配了较多插图，请读者注意观察，这对培养空间想像能力是有好处的.

2. 设有一物体，占有空间闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1\}$，在点 (x,y,z) 处的密度为 $\rho(x,y,z)=x+y+z$，计算该物体的质量.

解
$$M=\iiint_\Omega \rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(x+y+z)\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\left(x+y+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{3}{2}.$$

3. 如果三重积分 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的被积函数 $f(x,y,z)$ 是三个函数 $f_1(x),f_2(y),f_3(z)$ 的乘积，即 $f(x,y,z)=f_1(x)\cdot f_2(y)\cdot f_3(z)$，积分区域 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d,l\leqslant z\leqslant m\}$，证明这个三重积分等于三个单积

分的乘积，即

$$\iiint_{\Omega} f_1(x)f_2(y)f_3(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\int_l^m f_3(z)\mathrm{d}z.$$

证 $\displaystyle\iiint_{\Omega} f_1(x)f_2(y)f_3(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_a^b\left[\int_c^d\left(\int_l^m f_1(x)f_2(y)f_3(z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$

$$=\int_a^b\left[\int_c^d\left(f_1(x)f_2(y)\cdot\int_l^m f_3(z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b\left[\left(\int_l^m f_3(z)\mathrm{d}z\right)\cdot\left(\int_c^d f_1(x)f_2(y)\mathrm{d}y\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\left(\int_l^m f_3(z)\mathrm{d}z\right)\cdot\int_a^b\left[f_1(x)\cdot\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_l^m f_3(z)\mathrm{d}z\cdot\int_c^d f_2(y)\mathrm{d}y\cdot\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x=\text{右端}.$$

4. 计算 $\displaystyle\iiint_{\Omega} xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z=xy$，平面 $y=x$，$x=1$ 和 $z=0$ 所围成的闭区域.

解 如图 10−41，Ω 可用不等式表示为：

$$0\leqslant z\leqslant xy,0\leqslant y\leqslant x,0\leqslant x\leqslant 1.$$

因此

$$\iiint_{\Omega} xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^x y^2\mathrm{d}y\int_0^{xy} z^3\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^x x^4y^6\mathrm{d}y=\frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}\mathrm{d}x=\frac{1}{364}.$$

5. 计算 $\displaystyle\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$，其中 Ω 为平面 $x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$ 所围成的四面体.

解 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant z\leqslant 1-x-y,0\leqslant y\leqslant 1-x,0\leqslant x\leqslant 1\}$（图 10−42），于是

$$\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\frac{\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left[\frac{-1}{2(1+x+y+z)^2}\right]_0^{1-x-y}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left[-\frac{1}{8}+\frac{1}{2(1+x+y)^2}\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left[-\frac{y}{8}-\frac{1}{2(1+x+y)}\right]_0^{1-x}\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1\left[\frac{1-x}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2(1+x)}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right).$$

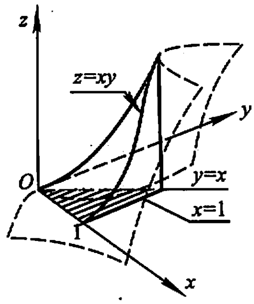


图 10－41

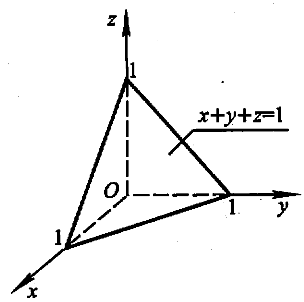


图 10－42

6. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围成的在第一卦限内的闭区域.

解法一 利用直角坐标计算. 由于

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}, 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}, 0 \leqslant x \leqslant 1\},$$

故

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^1 x\mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 x\mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \cdot \frac{1-x^2-y^2}{2}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}(1-x^2) - \frac{y^4}{4}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8}\int_0^1 x(1-x^2)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{48}.\end{aligned}$$

***解法二** 利用球面坐标计算，由于

$$\Omega = \left\{(r,\varphi,\theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right\},$$

故

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iiint\limits_{\Omega} (r^3\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta) \cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi \int_0^1 r^5\mathrm{d}r \\ &= \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{\sin^4\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{48}.$$

注 比较本题的两种解法，显然用球面坐标计算要简便得多，这是由本题的积分区域 Ω 的形状所决定的. 一般说来，凡是 Ω 由球面、圆锥面等曲面围成时，用球面坐标计算三重积分较为方便.

7. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由平面 $z=0,z=y,y=1$ 以及抛物柱面 $y=x^2$ 所围成的闭区域.

解法一 容易看出，Ω 的顶为平面 $z=y$，底为平面 $z=0$，Ω 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 由 $y=1$ 和 $y=x^2$ 所围成. 故 Ω 可用不等式表示为

$$0\leqslant z\leqslant y, x^2\leqslant y\leqslant 1, -1\leqslant x\leqslant 1.$$

因此

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}\mathrm{d}y\int_{0}^{y} z\mathrm{d}z \\ &= \int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}\frac{y^2}{2}\mathrm{d}y=\frac{1}{6}\int_{-1}^{1}x(1-x^6)\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

解法二 由于积分区域 Ω 关于 yOz 面对称（即若点 $(x,y,z)\in\Omega$，则 $(-x,y,z)$ 也属于 Ω），且被积函数 xz，关于 x 是奇函数（即 $(-x)z=-(xz)$），因此

$$\iiint\limits_{\Omega} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

8. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由锥面 $z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=h\,(R>0,h>0)$ 所围成的闭区域.

解法一 由 $z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=h$ 消去 z，得

$$x^2+y^2=R^2,$$

故 Ω 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$（图 10－43），

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\left|\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant h,(x,y)\in D_{xy}\right.\right\}.$$

于是

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} z\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}\left[h^2-\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\left[h^2\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{h^2}{R^2}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{h^2}{2} \cdot \pi R^2 - \frac{h^2}{2R^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{1}{4}\pi R^2 h^2.$$

解法二 用过点$(0,0,z)$、平行于xOy面的平面截Ω得平面圆域D_z，其半径为$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{Rz}{h}$，面积为$\frac{\pi R^2}{h^2}z^2$(图 10—43).

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D_z, 0 \leqslant z \leqslant h\}.$$

于是

$$\iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz = \int_0^h z\,dz \iint_{D_z} dx\,dy$$

$$= \int_0^h z \cdot \frac{\pi R^2}{h^2} z^2 dz = \frac{\pi R^2}{4h^2} \cdot h^4 = \frac{1}{4}\pi R^2 h^2.$$

注 解法二通俗地称为“先重后单”法，即先在D_z上作关于x、y的二重积分，然后再对z作定积分. 如果在D_z上关于x和y的二重积分易于计算，特别地，如果被积函数与x、y无关，且D_z的面积容易表达为z的函数，则采用这种方法比较简便.

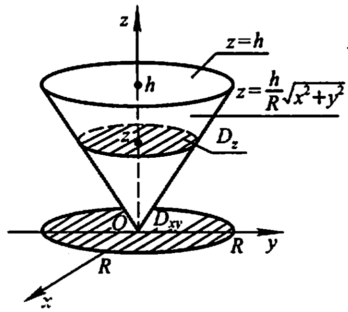


图 10—43

*__解法三__ 用球面坐标进行计算. 在球面坐标系中，圆锥面$z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$的方程为$\varphi=\alpha\left(=\arctan\frac{R}{h}\right)$，平面$z=h$的方程为$r=h\sec\varphi$，因此$\Omega$可表示为

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha, 0 \leqslant r \leqslant h\sec\varphi.$$

于是

$$\iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega r\cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\alpha \cos\varphi \sin\varphi\,d\varphi \int_0^{h\sec\varphi} r^3 dr$$

$$= 2\pi \int_0^\alpha \frac{h^4 \sin\varphi}{4\cos^3\varphi} d\varphi = -\frac{\pi h^4}{2} \int_0^\alpha \frac{d(\cos\varphi)}{\cos^3\varphi}$$

$$= \frac{\pi h^4}{4}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right)\left(\text{代入 } \alpha = \arctan\frac{R}{h}\right)$$

$$= \frac{\pi h^4}{4}\left(\frac{R^2+h^2}{h^2} - 1\right) = \frac{1}{4}\pi R^2 h^2.$$

9. 利用柱面坐标计算下列三重积分：

(1) $\iiint_\Omega z\,dv$，其中Ω是由曲面$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$及$z=x^2+y^2$所围成的闭区域；

(2) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由曲面 $x^2+y^2=2z$ 及平面 $z=2$ 所围成的闭区域.

解　(1) 由 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 和 $z=x^2+y^2$ 消去 z，得

$$(x^2+y^2)^2=2-(x^2+y^2),\text{即 } x^2+y^2=1.$$

从而知 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$（图 10－44）. 利用柱面坐标，$\Omega$ 可表示为

$$\rho^2\leqslant z\leqslant\sqrt{2-\rho^2},0\leqslant\rho\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

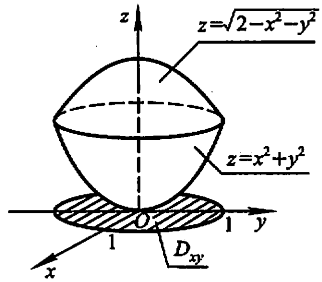


图 10－44

于是

$$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}z\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}z\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho(2-\rho^2-\rho^4)\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\left[\rho^2-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1=\frac{7}{12}\pi.$$

(2) 由 $x^2+y^2=2z$ 及 $z=2$ 消去 z 得 $x^2+y^2=4$，从而知 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$. 利用柱面坐标，$\Omega$ 可表示为

$$\frac{\rho^2}{2}\leqslant z\leqslant 2,0\leqslant\rho\leqslant 2,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

于是

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^2\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\left(2-\frac{\rho^2}{2}\right)\mathrm{d}\rho=2\pi\left[\frac{\rho^4}{2}-\frac{\rho^6}{12}\right]_0^2=\frac{16}{3}\pi.$$

*10. 利用球面坐标计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域；

(2) $\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v$，其中闭区域 Ω 由不等式 $x^2+y^2+(z-a)^2\leqslant a^2,x^2+y^2\leqslant z^2$ 所确定.

解　(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r$$

$$=2\pi[-\cos\varphi]_0^{\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1=\frac{4}{5}\pi.$$

(2) 在球面坐标系中，不等式 $x^2+y^2+(z-a)^2 \leqslant a^2$，即 $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2az$，变为 $r^2 \leqslant 2ar\cos\varphi$，即 $r \leqslant 2a\cos\varphi$；$x^2+y^2 \leqslant z^2$ 变为 $r^2\sin^2\varphi \leqslant r^2\cos^2\varphi$，即 $\tan\varphi \leqslant 1$，亦即 $\varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$. 因此 Ω 可表示为

$$0 \leqslant r \leqslant 2a\cos\varphi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4},$$

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi(\text{图 } 10-45).$$

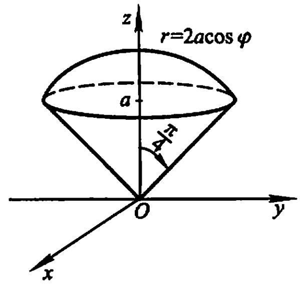


图 10-45

于是

$$\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} r\cos\varphi \cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi} r^3\,\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi \cdot \frac{1}{4}(2a\cos\varphi)^4\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4a^4\cos^5\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= 8\pi a^4\left[-\frac{\cos^6\varphi}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{7}{6}\pi a^4.$$

11. 选用适当的坐标计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{\Omega} xy\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=1, z=0, x=0, y=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域；

*(2) $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围成的闭区域；

(3) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由曲面 $4z^2=25(x^2+y^2)$ 及平面 $z=5$ 所围成的闭区域；

*(4) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}v$，其中闭区域 Ω 由不等式 $0<a\leqslant\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leqslant A, z\geqslant 0$ 所确定.

解 (1) 利用柱面坐标计算. Ω 可表示为

$$0 \leqslant z \leqslant 1, 0 \leqslant \rho \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

于是

$$\iiint_{\Omega} xy\,\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega}\rho^2\sin\theta\cos\theta \cdot \rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho\int_0^1\mathrm{d}z$$

$$=\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1\left[z\right]_0^1=\frac{1}{8}.$$

*(2) 在球面坐标系中,球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 的方程为 $r^2=r\cos\varphi$,即 $r=\cos\varphi$. Ω 可表示为

$$0\leqslant r\leqslant\cos\varphi,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi(\text{图 }10-46).$$

于是

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}r\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi}r^3\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cdot\frac{\cos^4\varphi}{4}\mathrm{d}\varphi$$

$$=-\frac{\pi}{2}\left[\frac{\cos^5\varphi}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{10}.$$

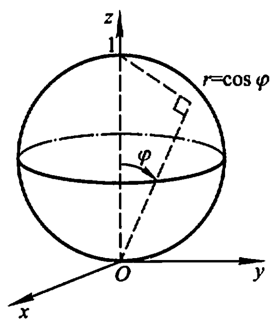


图 10－46

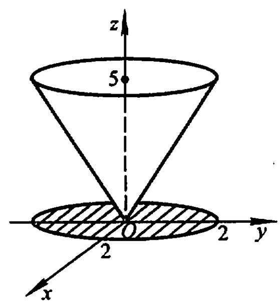


图 10－47

(3) 利用柱面坐标计算. Ω 可表示为

$$\frac{5}{2}\rho\leqslant z\leqslant 5,0\leqslant\rho\leqslant 2,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi(\text{图 }10-47),\text{于是}$$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\mathrm{d}\rho\int_{\frac{5}{2}\rho}^5\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\left(5-\frac{5}{2}\rho\right)\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\left[\frac{5}{4}\rho^4-\frac{1}{2}\rho^5\right]_0^2=8\pi.$$

*(4) 在球面坐标系中，Ω 可表示为

$$a\leqslant r\leqslant A,0\leqslant \varphi\leqslant \frac{\pi}{2},0\leqslant \theta\leqslant 2\pi.$$

于是

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v&=\iiint\limits_{\Omega}r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi\int_a^A r^4\mathrm{d}r\\&=2\pi\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{A^5-a^5}{5}\right)=\frac{4\pi}{15}(A^5-a^5).\end{aligned}$$

12. 利用三重积分计算下列由曲面所围成的立体的体积：

(1) $z=6-x^2-y^2$ 及 $z=\sqrt{x^2+y^2}$；

*(2) $x^2+y^2+z^2=2az(a>0)$ 及 $x^2+y^2=z^2$（含有 z 轴的部分）；

(3) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$；

(4) $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ 及 $x^2+y^2=4z$.

解 (1) 利用直角坐标计算. 由 $z=6-x^2-y^2$ 和 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 消去 z，解得 $\sqrt{x^2+y^2}=2$，即 Ω 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2+y^2\leqslant 4$. 于是

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 6-(x^2+y^2),x^2+y^2\leqslant 4\}.$$

因此

$$\begin{aligned}V&=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{6-(x^2+y^2)}\mathrm{d}z\\&=\iint\limits_{D_{xy}}[6-(x^2+y^2)-\sqrt{x^2+y^2}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y(\text{用极坐标})\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(6-\rho^2-\rho)\rho\mathrm{d}\rho\\&=2\pi\left[3\rho^2-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2=\frac{32}{3}\pi.\end{aligned}$$

注 本题也可用“先重后单”的积分次序求解：

对固定的 z，当 $0\leqslant z\leqslant 2$ 时，$D_z=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant z^2\}$；当 $2\leqslant z\leqslant 6$ 时，$D_z=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 6-z\}$（图 10-48）.

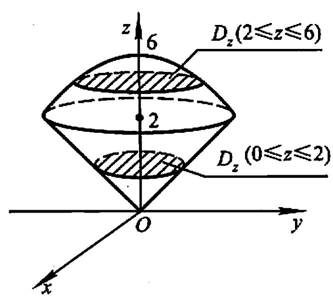


图 10-48

于是

$$V=V_1+V_2=\int_0^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_2^6\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2 \pi z^2 \mathrm{d}z+\int_2^6 \pi(6-z)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{8}{3}\pi+8\pi=\frac{32}{3}\pi.$$

*(2) 利用球面坐标计算. 球面 $x^2+y^2+z^2=2az$ 及圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的球面坐标方程分别为 $r=2a\cos\varphi$ 和 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，故

$$\Omega=\{(r,\varphi,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant 2a\cos\varphi, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}(\text{图 } 10-45).$$

于是

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{8a^3}{3}\sin\varphi\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{16\pi a^3}{3}\left[-\frac{1}{4}\cos^4\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi a^3.$$

注 本题若用“先重后单”的方法计算也很简便.

由 $x^2+y^2+z^2=2az$ 和 $x^2+y^2=z^2$ 解得 $z=a$. 对固定的 z，当 $0\leqslant z\leqslant a$ 时，$D_z=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant z^2\}$；当 $a\leqslant z\leqslant 2a$ 时，$D_z=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2az-z^2\}$. 于是

$$V=V_1+V_2=\int_0^a\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_a^{2a}\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^a\pi z^2\mathrm{d}z+\int_a^{2a}\pi(2az-z^2)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{3}\pi a^3+\frac{2}{3}\pi a^3=\pi a^3.$$

(3) 利用柱面坐标计算. 曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=x^2+y^2$ 的柱面坐标方程分别为 $z=\rho$ 和 $z=\rho^2$. 消去 z，得 $\rho=1$，故它们所围的立体在 xOy 面上的投影区域为 $\rho\leqslant 1$ (图 10-49). 因此

$$\Omega=\{(\rho,\theta,z)\mid \rho^2\leqslant z\leqslant\rho, 0\leqslant\rho\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}.$$

于是

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{\rho}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^1\rho(\rho-\rho^2)\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{6}.$$

(本题也可用"先重后单"的方法方便地求得结果,读者可自己练习.)

(4) 在直角坐标系中用"先重后单"的方法计算. 由 $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ 和 $x^2+y^2=4z$ 可解得 $z=1$.

对固定的 z,当 $0\leqslant z\leqslant 1$ 时, $D_z=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4z\}$;当 $1\leqslant z\leqslant\sqrt{5}$ 时, $D_z=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 5-z^2\}$(图 10—50).

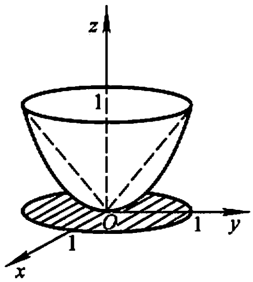


图 10—49

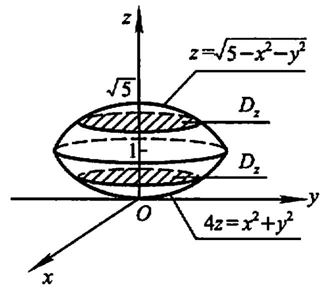


图 10—50

于是

$$V=V_1+V_2=\int_0^1 dz\iint_{D_z}dxdy+\int_1^{\sqrt{5}}dz\iint_{D_z}dxdy$$

$$=\int_0^1\pi(4z)dz+\int_1^{\sqrt{5}}\pi(5-z^2)dz$$

$$=2\pi+\pi\left[5z-\frac{z^3}{3}\right]_1^{\sqrt{5}}=\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-4).$$

(本题用柱面坐标计算也很方便,请读者自己练习.)

*13. 求球体 $r\leqslant a$ 位于锥面 $\varphi=\frac{\pi}{3}$ 和 $\varphi=\frac{2}{3}\pi$ 之间的部分的体积.

解 用球面坐标计算. 记 Ω 为立体所占的空间区域,有

$$V=\iiint_{\Omega}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sin\varphi d\varphi\int_0^a r^2dr$$

$$=\frac{2\pi a^3}{3}.$$

14. 求上、下分别为球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 和抛物面 $z=x^2+y^2$ 所围立体的体积.

解 由 $x^2+y^2+z^2=2$ 和 $z=x^2+y^2$ 消去 z,解得 $x^2+y^2=1$. 从而得立体 Ω 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2+y^2\leqslant 1$. 于是

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant z\leqslant\sqrt{2-x^2-y^2},x^2+y^2\leqslant 1\}.$$

因此

$$V=\iiint_{\Omega}dv=\iint_{D_{xy}}dxdy\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}dz$$

$$= \iint_{D_{xy}} [\sqrt{2-x^2-y^2}-(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y(\text{用极坐标})$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(\sqrt{2-\rho^2}-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{8\sqrt{2}-7}{6}\pi.$$

注 本题也可用"先重后单"的方法按下式方便地求得结果：

$$V = \int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant 2-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_0^1\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \pi\int_1^{\sqrt{2}}(2-z^2)\mathrm{d}z + \pi\int_0^1 z\mathrm{d}z$$

$$= \frac{4\sqrt{2}-5}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{8\sqrt{2}-7}{6}\pi.$$

*15. 球心在原点、半径为 R 的球体，在其上任意一点的密度的大小与这点到球心的距离成正比，求这球体的质量.

解 用球面坐标计算. Ω 为 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$，即 $r\leqslant R$. 按题设，密度函数 $\mu(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}=kr(k>0)$. 于是

$$M = \iiint_\Omega \mu(x,y,z)\mathrm{d}v = \iiint_\Omega kr\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^3\mathrm{d}r$$

$$= k\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{R^4}{4} = k\pi R^4.$$

习题 10－4 重积分的应用

1. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 内部的那部分面积.

解 如图 10－51，上半球面的方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

由曲面的对称性得所求面积为

$$A = 4\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 4\iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{\text{(极坐标)}} 4a\iint_D \frac{1}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho$$

$$= 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)\mathrm{d}\theta = 2a^2(\pi-2).$$

2. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的曲面面积.

解 由 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, \\ z^2=2x \end{cases}$ 解得 $x^2+y^2=2x$，故曲面在 xOy 面上的投影区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x\}$（图 10－52）.

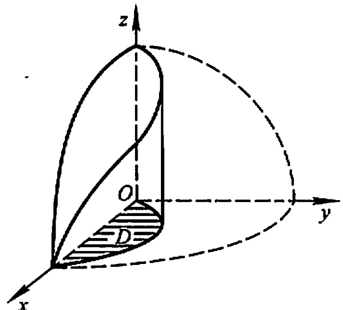


图 10－51

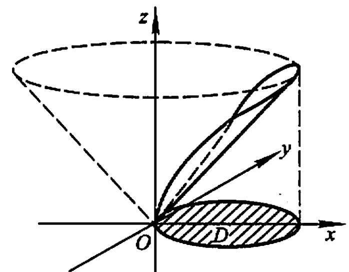


图 10－52

被割曲面的方程为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2},$$

于是所求曲面的面积为

$$A=\iint_D \sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{\text{(对称性)}} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$= 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta = 4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \sqrt{2}\pi.$$

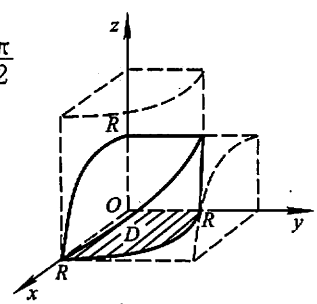


图 10－53

3. 求底圆半径相等的两个直交圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+z^2=R^2$ 所围立体的表面积.

解 如图 10－53，设第一卦限内的立体表面位于圆柱面 $x^2+z^2=R^2$ 上的那一部分的面积为 A，则由对称性知全部表面的面积为 $16A$.

$$A=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}+0}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = R\int_0^R \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y$$

$$=R\int_0^R \mathrm{d}x = R^2,$$

故全部表面积为 $16R^2$.

4. 设薄片所占的闭区域 D 如下,求均匀薄片的质心:

(1) D 由 $y=\sqrt{2px}$, $x=x_0$, $y=0$ 所围成;

(2) D 是半椭圆形闭区域 $\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1, y\geqslant 0\right\}$;

(3) D 是介于两个圆 $r=a\cos\theta$, $r=b\cos\theta(0<a<b)$ 之间的闭区域.

解 (1) 设质心为 $(\bar{x},\bar{y})$.

$$A=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{x_0}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}\mathrm{d}y = \int_0^{x_0}\sqrt{2px}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{2px_0^3};$$

$$\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{x_0} x\,\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}\mathrm{d}y = \int_0^{x_0}\sqrt{2p}\,x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{5}\sqrt{2px_0^5};$$

$$\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{x_0}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}} y\,\mathrm{d}y = \int_0^{x_0} px\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{px_0^2}{2},$$

于是 $\bar{x}=\frac{1}{A}\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{5}x_0$, $\bar{y}=\frac{1}{A}\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{8}\sqrt{2px_0}=\frac{3}{8}y_0$,

故所求质心为 $\left(\frac{3}{5}x_0,\frac{3}{8}y_0\right)$.

(2) 因 D 对称于 y 轴,故质心 $(\bar{x},\bar{y})$ 必位于 y 轴上,于是 $\bar{x}=0$.

$$\bar{y}=\frac{1}{A}\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{A}\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{A}\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{2a^2}(a^2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}\pi ab}\cdot\frac{2}{3}ab^2=\frac{4b}{3\pi}.$$

因此所求质心为 $\left(0,\frac{4b}{3\pi}\right)$.

(3) 因 D 对称于 x 轴，故质心 $(\bar{x},\bar{y})$ 位于 x 轴上，于是 $\bar{y}=0$（图 10−54）.

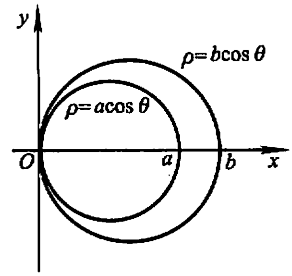


图 10−54

$$A=\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}(b^2-a^2),$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_D \rho\cos\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_{a\cos\theta}^{b\cos\theta}\rho^2\mathrm{d}\rho.\\&=\frac{2}{3}(b^3-a^3)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2}{3}(b^3-a^3)\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}(b^3-a^3),\end{aligned}$$

故
$$\bar{x}=\frac{1}{A}\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a^2+ab+b^2}{2(a+b)}.$$

所求质心为 $\left(\dfrac{a^2+ab+b^2}{2(a+b)},0\right)$.

5. 设平面薄片所占的闭区域 D 由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=x$ 所围成，它在点 (x,y) 处的面密度 $\mu(x,y)=x^2y$，求该薄片的质心.

解
$$\begin{aligned}M&=\iint\limits_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1x^2\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}y\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\frac{1}{2}(x^4-x^6)\mathrm{d}x=\frac{1}{35};\\M_x&=\iint\limits_D y\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^1x^2\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}y^2\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\frac{1}{3}(x^5-x^8)\mathrm{d}x=\frac{1}{54};\\M_y&=\iint\limits_D x\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x^3y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^1x^3\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}y\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\frac{1}{2}(x^5-x^7)\mathrm{d}x=\frac{1}{48},\end{aligned}$$

于是
$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{35}{48};\qquad\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{35}{54}.$$

所求质心为 $\left(\dfrac{35}{48},\dfrac{35}{54}\right)$.

6. 设有一等腰直角三角形薄片，腰长为 a，各点处的面密度等于该点到直角顶点的距离的平方，求这薄片的质心.

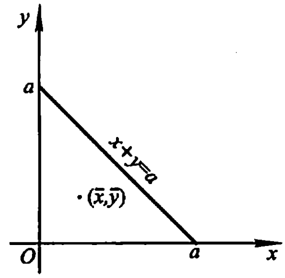


图 10－55

解 如图 10－55，按题设，面密度 $\mu(x,y)=x^2+y^2$. 由对称性知 $\bar{x}=\bar{y}$.

$$M=\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^a\left[x^2(a-x)+\frac{(a-x)^3}{3}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{6}a^4;$$

$$M_y=\iint\limits_D x(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a x\mathrm{d}x\int_0^{a-x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^a\left[x^3(a-x)+\frac{x(a-x)^3}{3}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^a\left(-\frac{4}{3}x^4+2ax^3-a^2x^2+\frac{a^3}{3}x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{15}a^5,$$

因此
$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{2}{5}a,\bar{y}=\bar{x}=\frac{2}{5}a.$$

所求质心为 $\left(\frac{2}{5}a,\frac{2}{5}a\right)$.

7. 利用三重积分计算下列由曲面所围立体的质心（设密度 $\rho=1$）：

(1) $z^2=x^2+y^2,z=1$；

*(2) $z=\sqrt{A^2-x^2-y^2},z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}(A>a>0),z=0$；

(3) $z=x^2+y^2,x+y=a,x=0,y=0,z=0$.

解 (1) 曲面所围立体为圆锥体，其顶点在原点，并关于 z 轴对称，又由于它是匀质的，因此它的质心位于 z 轴上，即有 $\bar{x}=\bar{y}=0$. 立体的体积为 $V=\frac{1}{3}\pi$.

$$\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=\frac{1}{V}\iint\limits_{x^2-y^2\leqslant1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{V}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}\frac{1}{2}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{2}(1-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{3}{\pi}\cdot2\pi\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1=\frac{3}{4},$$

故所求质心为 $\left(0,0,\frac{3}{4}\right)$.

*(2) 立体由两个同心的上半球面和 xOy 面所围成，关于 z 轴对称，又由于它

是匀质的，故其质心位于 z 轴上，即有 $\bar{x}=\bar{y}=0$．立体的体积为

$$V=\frac{2}{3}\pi\left(A^3-a^3\right).$$

$$\begin{aligned}\bar{z}&=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}v=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_a^A r^3\,\mathrm{d}r\\&=\frac{3}{2\pi(A^3-a^3)}\cdot2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{A^4-a^4}{4}\\&=\frac{3(A^4-a^4)}{8(A^3-a^3)},\end{aligned}$$

故立体质心为 $\left(0,0,\dfrac{3(A^4-a^4)}{8(A^3-a^3)}\right)$．

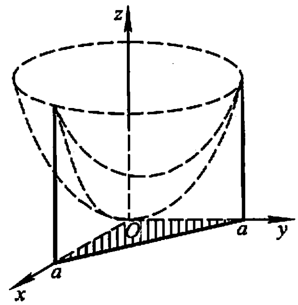


图 10－56

(3) 如图 10－56，$\Omega=\{(x,y,z)\mid0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant a-x,0\leqslant z\leqslant x^2+y^2\}$．

$$\begin{aligned}V&=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z\\&=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y\\&=\int_0^a\left[x^2(a-x)+\frac{1}{3}(a-x)^3\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^a\left[ax^2-x^3+\frac{1}{3}(a-x)^3\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{6}a^4;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{z}&=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}v=\frac{1}{V}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}z\,\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{V}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\frac{1}{2}(x^4+2x^2y^2+y^4)\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2V}\int_0^a\left[x^4(a-x)+\frac{2}{3}x^2(a-x)^3+\frac{1}{5}(a-x)^5\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{3}{a^4}\cdot\frac{7a^6}{90}=\frac{7}{30}a^2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{x}&=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}x\,\mathrm{d}v=\frac{1}{V}\int_0^a x\,\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{V}\int_0^a x\left[x^2(a-x)+\frac{1}{3}(a-x)^3\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{6}{a^4}\cdot\frac{a^5}{15}=\frac{2}{5}a,\end{aligned}$$

由于立体匀质且关于平面 $y=x$ 对称，故

$$\bar{y}=\bar{x}=\frac{2}{5}a.$$

所求质心为 $\left(\frac{2}{5}a,\frac{2}{5}a,\frac{7}{30}a^2\right)$.

* 8. 设球体占有闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz\}$，它在内部各点处的密度的大小等于该点到坐标原点的距离的平方. 试求这球体的质心.

解 在球面坐标系中，Ω 可表示为

$$0\leqslant r\leqslant 2R\cos\varphi, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

球体内任意一点 (x,y,z) 处的密度大小为

$$\rho=x^2+y^2+z^2=r^2.$$

由于球体的几何形状及质量分布均关于 z 轴对称，故可知其质心位于 z 轴上，因此 $\bar{x}=\bar{y}=0$.

$$\begin{aligned}M&=\iiint\limits_{\Omega}\rho\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\\&=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{32}{5}R^5\cos^5\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{32}{15}\pi R^5;\\ \bar{z}&=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}\rho z\mathrm{d}v=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^2\cdot r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\\&=\frac{2\pi}{M}\int_0^{2\pi}\frac{64}{6}R^6\cos^7\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{5}{4}R,\end{aligned}$$

故球体的质心为 $\left(0,0,\frac{5}{4}R\right)$.

注 从以上两题的题解可看出，在计算立体的质心时，要注意利用对称性来减少运算量. 对匀质立体来说，只要考虑立体几何形状的对称性(如第 7 题)；但对非匀质立体来说，除了立体的几何形状的对称性外，还需注意立体的质量分布是否也具有相应的对称性(如第 8 题).

9. 设均匀薄片(面密度为常数 1)所占闭区域 D 如下，求指定的转动惯量：

(1) $D=\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right.\right\}$，求 I_y；

(2) D 由抛物线 $y^2=\frac{9}{2}x$ 与直线 $x=2$ 所围成，求 I_x 和 I_y；

(3) D 为矩形闭区域 $\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b\}$，求 I_x 和 I_y.

解 (1)
$$\begin{aligned}I_y&=\iint\limits_{D}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-a}^{a}x^2\mathrm{d}x\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}y\\&=\frac{2b}{a}\int_{-a}^{a}x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \frac{4b}{a}\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

令 $x = a\sin t$，换元，则

$$上式 = \frac{4b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3\sin^2 t\cos t \cdot a\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= 4a^3 b\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,\mathrm{d}t\right]$$

$$= 4a^3 b\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}\pi a^3 b.$$

(2) 如图 10－57，$D = \left\{(x,y)\,\middle|\,-3\sqrt{\frac{x}{2}} \leqslant y \leqslant 3\sqrt{\frac{x}{2}}, 0 \leqslant x \leqslant 2\right\}$.

$$I_x = \iint_D y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{对称性} 2\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^{3\sqrt{\frac{x}{2}}} y^2\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^2 \frac{27}{2\sqrt{2}}x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{72}{5};$$

$$I_y = \iint_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{对称性} 2\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x\int_0^{3\sqrt{\frac{x}{2}}}\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^2 \frac{3}{\sqrt{2}}x^{\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{96}{7}.$$

(3)
$$I_x = \iint_D y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^a \mathrm{d}x\int_0^b y^2\,\mathrm{d}y = \frac{ab^3}{3};$$

$$I_y = \iint_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^a x^2\,\mathrm{d}x\int_0^b \mathrm{d}y = \frac{a^3 b}{3}.$$

10. 已知均匀矩形板(面密度为常量 μ)的长和宽分别为 b 和 h，计算此矩形板对于通过其形心且分别与一边平行的两轴的转动惯量.

解 建立如图 10－58 的坐标系，使原点 O 为矩形板的形心，x 轴和 y 轴分别平行于矩形的两边，则所求的转动惯量为

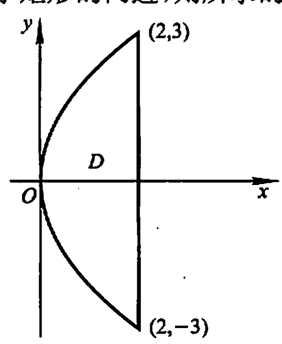


图 10－57

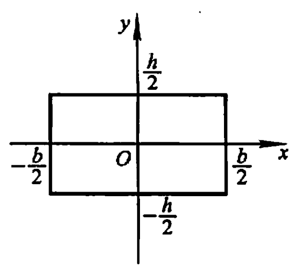


图 10－58

$$I_x = \iint_D y^2 \mu \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mu \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathrm{d}x \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \mathrm{d}y = \frac{1}{12}\mu\, bh^3;$$

$$I_y = \iint_D x^2 \mu \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mu \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 \mathrm{d}x \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathrm{d}y = \frac{1}{12}\mu\, hb^3.$$

11. 一均匀物体(密度ρ为常量)占有的闭区域Ω由曲面$z = x^2 + y^2$和平面$z = 0$，$|x| = a$，$|y| = a$所围成，

(1) 求物体的体积；

(2) 求物体的质心；

(3) 求物体关于z轴的转动惯量.

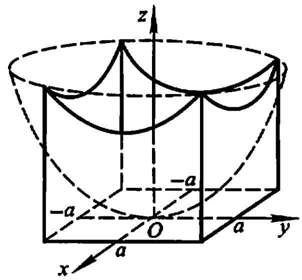


图 10-59

解 (1) 如图 10-59，由Ω的对称性可知

$$V = 4\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y \int_0^{x^2+y^2} \mathrm{d}z$$

$$= 4\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a (x^2 + y^2)\mathrm{d}y$$

$$= 4\int_0^a \left(ax^2 + \frac{a^3}{3}\right)\mathrm{d}x = \frac{8}{3}a^4.$$

(2) 由对称性可知，质心位于z轴上，故$\bar{x} = \bar{y} = 0$.

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\iiint_\Omega \rho z \mathrm{d}v \xlongequal{\text{对称性}} \frac{4}{V}\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y \int_0^{x^2+y^2} z\mathrm{d}z$$

$$= \frac{4}{V}\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a \frac{1}{2}(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{2}{V}\int_0^a \left(ax^4 + \frac{2}{3}a^3x^2 + \frac{1}{5}a^5\right)\mathrm{d}x = \frac{7}{15}a^2.$$

(3) $$I_z = \iiint_\Omega \rho(x^2 + y^2)\mathrm{d}v \xlongequal{\text{对称性}} 4\rho\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y \int_0^{x^2+y^2} (x^2 + y^2)\mathrm{d}z$$

$$= 4\rho\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a (x^4 + 2x^2y^2 + y^4)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{112}{45}\rho a^6.$$

12. 求半径为a、高为h的均匀圆柱体对于过中心而平行于母线的轴的转动惯量(设密度$\rho = 1$).

解 建立空间直角坐标系，使原点位于圆柱体的中心，z轴平行于母线，则圆柱体所占的空间闭区域

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \middle| x^2 + y^2 \leqslant a^2, -\frac{h}{2} \leqslant z \leqslant \frac{h}{2}\right\}$$

$$\xlongequal{\text{柱面坐标}} \left\{(\rho,\theta,z) \middle| 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \rho \leqslant a, -\frac{h}{2} \leqslant z \leqslant \frac{h}{2}\right\}.$$

于是所求的转动惯量为

$$I_z=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\mathrm{d}\rho\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\mathrm{d}z$$
$$=2\pi\cdot\frac{a^4}{4}\cdot h=\frac{1}{2}\pi ha^4.$$

13. 设面密度为常量 μ 的匀质半圆环形薄片占有闭区域 $D=\{(x,y,0)\mid R_1\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant R_2,x\geqslant 0\}$，求它对位于 z 轴上点 $M_0(0,0,a)(a>0)$ 处单位质量的质点的引力 $\boldsymbol{F}$.

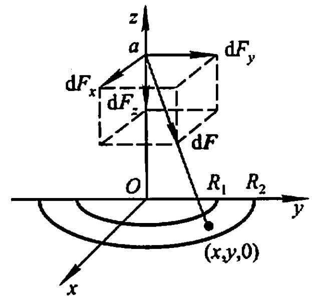


图 10－60

解 如图 10－60，引力元素 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 沿 x 轴和 z 轴的分量分别为

$$\mathrm{d}F_x=G\frac{\mu x}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma$$

和 $$\mathrm{d}F_z=G\frac{\mu(-a)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma.$$

于是 $$F_x=G\mu\iint_D\frac{x}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}G\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho\cos\theta}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=G\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\rho$$

$$=2G\mu\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\rho(\text{令 }\rho=a\tan t\text{ 换元})$$

$$=2G\mu\int_{\arctan\frac{R_1}{a}}^{\arctan\frac{R_2}{a}}\frac{a^2\tan^2t}{a^3\sec^3t}\cdot a\sec^2t\mathrm{d}t$$

$$=2G\mu\int_{\arctan\frac{R_1}{a}}^{\arctan\frac{R_2}{a}}(\sec t-\cos t)\mathrm{d}t$$

$$=2G\mu\Big[\ln(\sec t+\tan t)-\sin t\Big]_{\arctan\frac{R_1}{a}}^{\arctan\frac{R_2}{a}}$$

$$=2G\mu\left(\ln\frac{\sqrt{R_2^2+a^2}+R_2}{\sqrt{R_1^2+a^2}+R_1}-\frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+a^2}}+\frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right);$$

$$F_z=-Ga\mu\iint_D\frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}} -Ga\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\rho$$

$$=\pi Ga\mu\left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2+a^2}}\right]_{R_1}^{R_2}$$

$$=\pi Ga\mu\left(\frac{1}{\sqrt{R_2^2+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right),$$

由于 D 关于 x 轴对称，且质量均匀分布，故 $F_y=0$. 因此引力，

$$\boldsymbol{F}=\left(2G\mu\left(\ln\frac{\sqrt{R_2^2+a^2}+R_2}{\sqrt{R_1^2+a^2}+R_1}-\frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+a^2}}+\frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right),0,\right.$$

$$\left.\pi Ga\mu\left(\frac{1}{\sqrt{R_2^2+a^2}}-\frac{1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right)\right).$$

14. 设均匀柱体密度为 ρ，占有闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant R^2,0\leqslant z\leqslant h\}$，求它对于位于点 $M_0(0,0,a)(a>h)$ 处的单位质量的质点的引力.

解 由柱体的对称性和质量分布的均匀性知 $F_x=F_y=0$. 引力沿 z 轴的分量

$$F_z=\iiint\limits_{\Omega}G\rho\frac{z-a}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}v$$

$$=G\rho\int_0^h(z-a)\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\xlongequal{\text{柱面坐标}} G\rho\int_0^h(z-a)\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{[r^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=2\pi G\rho\int_0^h(z-a)\left[\frac{1}{a-z}-\frac{1}{\sqrt{R^2+(z-a)^2}}\right]\mathrm{d}z$$

$$=2\pi G\rho\int_0^h\left[-1-\frac{z-a}{\sqrt{R^2+(z-a)^2}}\right]\mathrm{d}z$$

$$=-2\pi G\rho\left[h+\sqrt{R^2+(h-a)^2}-\sqrt{R^2+a^2}\right].$$

习题 10-5 含参变量的积分

1. 求下列含参变量的积分所确定的函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\int_x^{1+x}\frac{\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\int_{-1}^1\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\int_0^2 y^2\cos(xy)\mathrm{d}y$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}\int_x^{1+x}\frac{\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2}=\int_0^{1+0}\frac{\mathrm{d}y}{1+0+y^2}=[\arctan y]_0^1=\frac{\pi}{4}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\,dy=\int_{-1}^{1}|y|\,dy=2\int_{0}^{1}y\,dy=1.$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\int_{0}^{2}y^2\cos(xy)\,dy=\int_{0}^{2}y^2(\cos 0)\,dy=\frac{8}{3}.$

2. 求下列函数的导数：

(1) $\varphi(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}(y^2\sin x-y^3)\,dy$；　　(2) $\varphi(x)=\int_{0}^{x}\frac{\ln(1+xy)}{y}\,dy$；

(3) $\varphi(x)=\int_{x^2}^{x^3}\arctan\frac{y}{x}\,dy$；　　(4) $\varphi(x)=\int_{x}^{x^2}e^{-xy^2}\,dy.$

解　(1) $$\begin{aligned}\varphi'(x)&=\int_{\sin x}^{\cos x}y^2\cos x\,dy+(\cos^2x\sin x-\cos^3x)(\cos x)'\\&\quad-(\sin^2x\sin x-\sin^3x)(\sin x)'\\&=\frac{1}{3}\cos x(\cos^3x-\sin^3x)+(\cos x-\sin x)\sin x\cos^2x\\&=\frac{1}{3}\cos x(\cos x-\sin x)(1+2\sin 2x).\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\varphi'(x)&=\int_{0}^{x}\frac{1}{1+xy}\,dy+\frac{\ln(1+x^2)}{x}\\&=\frac{1}{x}[\ln(1+xy)]_0^x+\frac{\ln(1+x^2)}{x}\\&=\frac{2}{x}\ln(1+x^2).\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\varphi'(x)&=\int_{x^2}^{x^3}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dy+\arctan x^2\cdot 3x^2-\arctan x\cdot 2x\\&=-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\Big|_{x^2}^{x^3}+3x^2\arctan x^2-2x\arctan x\\&=\ln\sqrt{\frac{1+x^2}{1+x^4}}+3x^2\arctan x^2-2x\arctan x.\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}\varphi'(x)&=\int_{x}^{x^2}e^{-xy^2}(-y^2)\,dy+e^{-x^5}\cdot 2x-e^{-x^3}\cdot 1\\&=2xe^{-x^5}-e^{-x^3}-\int_{x}^{x^2}y^2e^{-xy^2}\,dy.\end{aligned}$$

3. 设 $F(x)=\int_{0}^{x}(x+y)f(y)\,dy$，其中 $f(y)$ 为可微分的函数，求 $F''(x)$.

解　$F'(x)=\int_{0}^{x}f(y)\,dy+2xf(x)$；

$F''(x)=f(x)+2f(x)+2xf'(x)=3f(x)+2xf'(x).$

4. 应用对参数的微分法，计算下列积分：

(1) $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}\ (|a|<1)$；

(2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos^2 x+a^2\sin^2 x)\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

解 (1) 设 $$\varphi(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos x},$$

则 $\varphi(0)=0,\varphi(a)=I$. 由于

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{2}{1-\alpha^2\cos^2 x},$$

故 $$\varphi'(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{1-\alpha^2\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\mathrm{d}\tan x}{\sec^2 x-\alpha^2}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\tan x}{(1-\alpha^2)+\tan^2 x}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left[\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}},$$

于是 $$I=\varphi(a)-\varphi(0)=\int_0^a\varphi'(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\int_0^a\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\mathrm{d}\alpha$$

$$=\pi\arcsin a.$$

(2) 设 $$\varphi(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos^2 x+\alpha^2\sin^2 x)\mathrm{d}x,$$

则 $\varphi(1)=0,\varphi(a)=I$. 由于

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}[\ln(\cos^2 x+\alpha^2\sin^2 x)]=\frac{2\alpha\sin^2 x}{\cos^2 x+\alpha^2\sin^2 x},$$

故

$$\varphi'(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\alpha\sin^2 x}{\cos^2 x+\alpha^2\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{u=\tan x}2\alpha\int_0^{-\infty}\frac{u^2}{1+\alpha^2u^2}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

$$=\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+\alpha^2u^2}\right](\alpha\neq 1)$$

$$=\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\alpha}\right)=\frac{\pi}{\alpha+1};$$

又当 $\alpha=1$ 时，$$\varphi'(1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

因此 $\varphi'(\alpha)$ 在 $x=1$ 处连续. 从而对任一 $a>0$，$\varphi'(\alpha)$ 在区间 $[1,a]$(或 $[a,1]$)上连续. 于是

$$I=\varphi(a)-\varphi(1)=\int_1^a\varphi'(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\int_1^a\frac{\pi}{\alpha+1}\mathrm{d}\alpha$$

$$=\pi\ln\frac{a+1}{2}.$$

5. 计算下列积分：

(1) $\int_0^1\frac{\arctan x}{x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$；

(2) $\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx(0<a<b)$.

解 (1) 因为
$$\frac{\arctan x}{x}=\int_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2},$$
故
$$\text{原式}=\int_0^1\left[\int_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2}\right]\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\quad\text{（交换积分次序）}$$
$$=\int_0^1\left[\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\right]dy,$$
由于
$$\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+y^2\sin^2 t}$$
$$\xlongequal{u=\tan t}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+(1+y^2)u^2}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}[\arctan(\sqrt{1+y^2}u)]_0^{+\infty}$$
$$=\frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}},$$
因此
$$\text{原式}=\int_0^1\frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}dy=\frac{\pi}{2}[\ln(y+\sqrt{1+y^2})]_0^1$$
$$=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

(2) 因为
$$\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y dy,$$
故
$$\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx\int_a^b x^y dy\quad\text{（交换积分次序）}$$
$$=\int_a^b dy\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y dx.$$
由于
$$\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y dx\xlongequal{x=e^{-t}}\int_{+\infty}^0\sin t\cdot e^{-yt}(-e^{-t})dt$$
$$=\int_0^{+\infty}\sin t\cdot e^{-(y+1)t}dt\quad\text{（分部积分）}$$
$$=\frac{1}{1+(y+1)^2}e^{-(y+1)t}[\cos t-(y+1)\sin t]\Big|_0^{+\infty}$$
$$=\frac{1}{1+(y+1)^2},$$

因此 $\qquad$ 原式$=\int_a^b \frac{1}{1+(y+1)^2}dy=[\arctan(y+1)]_a^b$

$$=\arctan(b+1)-\arctan(a+1).$$

总习题十

1. 选择以下各题中给出的四个结论中一个正确的结论：

(1) 设有空间闭区域 $\Omega_1=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,z\geqslant 0\}$，$\Omega_2=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0\}$，则有________.

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} x\mathrm{d}v$. $\qquad$ (B) $\iiint\limits_{\Omega_1} y\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} y\mathrm{d}v$.

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}v$. $\qquad$ (D) $\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} xyz\mathrm{d}v$.

(2) 设有平面闭区域 $D=\{(x,y)\,|\,-a\leqslant x\leqslant a,x\leqslant y\leqslant a\}$，$D_1=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant a,x\leqslant y\leqslant a\}$. 则 $\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. $\qquad$ (B) $2\iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. $\qquad$ (D) 0.

(3) 设 $f(x)$为连续函数，$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$，则 $F'(2)=$________.

(A) $2f(2)$. $\qquad$ (B) $f(2)$.

(C) $-f(2)$. $\qquad$ (D) 0.

解 (1) 先说明(A)不正确. 由于 Ω_1 关于 yOz 面对称，而被积函数 x 关于 x 是奇函数，故 $\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}v=0$，而 $\iiint\limits_{\Omega_2} x\mathrm{d}v\neq 0$，故(A)不正确. 类似可说明(B)和(D)不正确. 再说明(C)是正确的. 设 $\Omega_3=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,z\geqslant 0,x\geqslant 0\}$. 由于被积函数 z 关于 x 是偶函数，而 Ω_3 与 $\Omega_1\backslash\Omega_3$[①] 关于 yOz 面对称，故 $\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}v=2\iiint\limits_{\Omega_3} z\mathrm{d}v$. 又由于被积函数 z 关于 y 也是偶函数，且 Ω_2 与 $\Omega_3\backslash\Omega_2$ 关于 xOz 面对

① $\Omega_1\backslash\Omega_3=\{(x,y,z)\,|\,(x,y,z)\in\Omega_1$ 且 $(x,y,z)\notin\Omega_3\}$，称为 Ω_1 与 Ω_3 的差集.

称，故$\iiint\limits_{\Omega_3} z\mathrm{d}v = 2\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}v$[①]. 因此应选(C).

(2) 记D的三个顶点为$A(a,a)$，$B(-a,a)$，$C(-a,-a)$(图 10−61). 联结O、B，则D为$\triangle COB$和$\triangle BOA$之并. 由于$\triangle COB$关于x轴对称，$\triangle AOB$关于y轴对称，而函数xy关于y和x均是奇函数，从而有

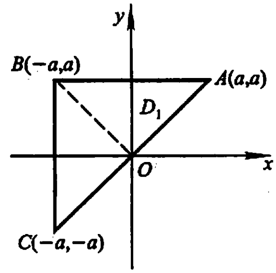


图 10−61

$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\triangle AOB} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\triangle COB} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0+0=0;$$

又由于函数$\cos x\sin y$关于y是奇函数，关于x是偶函数，从而有

$$\iint\limits_D \cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\triangle COB} \cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\triangle AOB} \cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= 0 + 2\iint\limits_{D_1} \cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因此应选(A).

(3) **解法一** 由于考虑$F'(2)$，故可设$t>1$. 对所给二重积分交换积分次序，得

$$F(t) = \int_1^t f(x)\mathrm{d}x\int_1^x \mathrm{d}y$$
$$= \int_1^t (x-1)f(x)\mathrm{d}x,$$

于是，$$F'(t)=(t-1)f(t),$$

从而有 $$F'(2)=f(2). \quad \text{故选(B).}$$

解法二 设$f(x)$的一个原函数为$G(x)$，则有

$$F(t) = \int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x = \int_1^t [G(t)-G(y)]\mathrm{d}y$$
$$= G(t)\int_1^t \mathrm{d}y - \int_1^t G(y)\mathrm{d}y = (t-1)G(t) - \int_1^t G(y)\mathrm{d}y.$$

求导得

$$F'(t) = G(t) + (t-1)f(t) - G(t) = (t-1)f(t),$$

因此

$$F'(2) = f(2).$$

2. 计算下列二重积分：

---

① 关于三重积分中如何利用对称性的问题，请读者参阅本书习题 10−1 第 2 题题解的注(1)、(2)，得出有关结论.

(1) $\iint\limits_D (1+x)\sin y\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是顶点分别为 $(0,0)$,$(1,0)$,$(1,2)$ 和 $(0,1)$ 的梯形闭区域;

(2) $\iint\limits_D (x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant \sin x, 0\leqslant x\leqslant \pi\}$;

(3) $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是圆周 $x^2+y^2=Rx$ 所围成的闭区域;

(4) $\iint\limits_D (y^2+3x-6y+9)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$.

解 (1) D 可表示为 $0\leqslant y\leqslant 1+x, 0\leqslant x\leqslant 1$,于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_D (1+x)\sin y\mathrm{d}\sigma &= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1+x}(1+x)\sin y\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1[(1+x)-(1+x)\cos(1+x)]\mathrm{d}x\\ &\xlongequal{t=1+x} \int_1^2 (t-t\cos t)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}-t\sin t-\cos t\right]_1^2\\ &= \frac{3}{2}+\sin 1+\cos 1-2\sin 2-\cos 2.\end{aligned}$$

(2) 由于

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x^2\mathrm{d}\sigma &= \int_0^\pi x^2\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}\mathrm{d}y\\ &= \int_0^\pi x^2\sin x\mathrm{d}x = -[x^2\cos x]_0^\pi + 2\int_0^\pi x\cos x\mathrm{d}x\\ &= \pi^2+2\left(x\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x\right) = \pi^2-4;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_D y^2\mathrm{d}\sigma &= \int_0^\pi \mathrm{d}x\int_0^{\sin x} y^2\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{3}\int_0^\pi \sin^3 x\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\mathrm{d}x^{①}\\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9},\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\iint\limits_D (x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma &= \iint\limits_D x^2\mathrm{d}\sigma - \iint\limits_D y^2\mathrm{d}\sigma = (\pi^2-4)-\frac{4}{9}\\ &= \pi^2-\frac{40}{9}.\end{aligned}$$

(3) 利用极坐标计算.在极坐标系中,

---

① 一般有:$\int_0^\pi \sin^n x\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$,参阅本书习题 5-3 第 7(13)题的解答.

$$D=\left\{(\rho,\theta)\middle|0\leqslant\rho\leqslant R\cos\theta,-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

于是

$$\begin{aligned}\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma&=\iint_D\sqrt{R^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{3}[(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}]_0^{R\cos\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^3}{3}(1-|\sin^3\theta|)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{R^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right).\end{aligned}$$

注 如果忽略 $\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$上非正，而按$(R^2-R^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}=R^3\sin^3\theta$ 计算，将导致错误. 这是一类常见错误，要注意避免.

(4) 利用对称性可知 $\iint_D 3x\mathrm{d}\sigma=0,\iint_D 6y\mathrm{d}\sigma=0.$

又

$$\iint_D 9\mathrm{d}\sigma=9x(D\text{ 的面积})=9\pi R^2,$$

$$\begin{aligned}\iint_D y^2\mathrm{d}\sigma&\xlongequal{\text{极坐标}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^2\sin^2\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho\\&=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^R\rho^3\mathrm{d}\rho\\&=\pi\cdot\frac{R^4}{4}=\frac{\pi}{4}R^4,\end{aligned}$$

因此

$$\text{原式}=\frac{\pi}{4}R^4+9\pi R^2.$$

3. 交换下列二次积分的次序：

(1) $\int_0^4\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)}f(x,y)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{2y}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^3\mathrm{d}y\int_0^{3-y}f(x,y)\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

解 (1) 所给的二次积分等于闭区域 D 上的二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|-\sqrt{4-y}\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}(y-4),0\leqslant y\leqslant 4\right\}$（图 10－62），将 D 表达为 $2x+4\leqslant y\leqslant 4-x^2$，$-2\leqslant x\leqslant 0$，则得

$$\int_0^4\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\frac{1}{2}(y-4)}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{-2}^0\mathrm{d}x\int_{2x+4}^{4-x^2}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

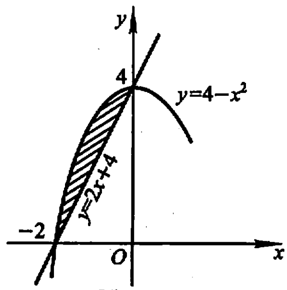


图 10－62

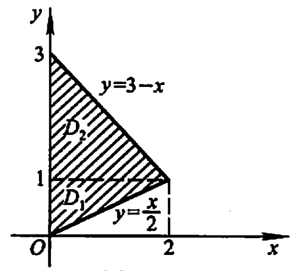


图 10－63

(2) 所给二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=D_1\cup D_2$，$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2y,0\leqslant y\leqslant 1\}$，$D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 3-y,1\leqslant y\leqslant 3\}$（图 10－63）. D 可表达为 $\left\{(x,y)\middle|\frac{x}{2}\leqslant y\leqslant 3-x,0\leqslant x\leqslant 2\right\}$，于是

$$\text{原式}=\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{3-x}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

(3) 所给二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid\sqrt{x}\leqslant y\leqslant 1+\sqrt{1-x^2},0\leqslant x\leqslant 1\}$（图 10－64）. 将 D 表达为 $D_1\cup D_2$，其中 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant y^2,0\leqslant y\leqslant 1\}$；$D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\sqrt{2y-y^2},1\leqslant y\leqslant 2\}$，于是

$$\text{原式}=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{y^2}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

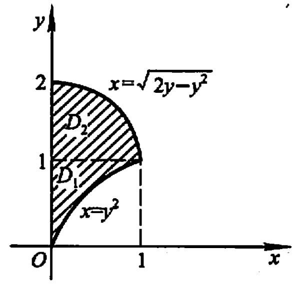


图 10－64

4. 证明：

$$\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{e}^{m(a-x)}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a(a-x)\mathrm{e}^{m(a-x)}f(x)\mathrm{d}x.$$

证 上式左端的二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{m(a-x)}f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant y,0\leqslant y\leqslant a\}=\{(x,y)\mid x\leqslant y\leqslant a,0\leqslant x\leqslant a\}$. 于是交换积分次序即得

$$\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a \mathrm{d}x\int_x^a \mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^a (a-x)\mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)\mathrm{d}x.$$

5. 把积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$表为极坐标形式的二次积分，其中积分区域$D=\{(x,y)\mid x^2\leqslant y\leqslant 1,-1\leqslant x\leqslant 1\}$.

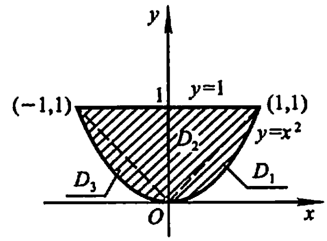


图 10－65

解　积分域D如图10－65所示. 抛物线$y=x^2$的极坐标方程为$\rho=\sec\theta\tan\theta$；直线$y=1$的极坐标方程为$\rho=\csc\theta$. 用射线$\theta=\frac{\pi}{4}$和$\theta=\frac{3\pi}{4}$将$D$分成$D_1$、$D_2$、$D_3$三部分：

$$D_1: 0\leqslant\rho\leqslant\sec\theta\tan\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4};$$
$$D_2: 0\leqslant\rho\leqslant\csc\theta, \frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4};$$
$$D_3: 0\leqslant\rho\leqslant\sec\theta\tan\theta, \frac{3\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

因此
$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sec\theta\tan\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho +$$
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\csc\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho +$$
$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sec\theta\tan\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

6. 设$f(x,y)$在闭区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant y,x\geqslant 0\}$上连续，且
$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
求$f(x,y)$.

解　设
$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = A, \text{则}$$
$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}A,$$
从而
$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{8}{\pi}A\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
又

$$\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = D\text{ 的面积} = \frac{\pi}{8},$$

故得
$$A = \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - A,$$

因此
$$A = \frac{1}{2}\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

在极坐标系中，
$$D = \{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant\sin\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\},$$

因此
$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{6}-\frac{2}{9},$$

于是得
$$A=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{9}.$$

从而
$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}+\frac{8}{9\pi}-\frac{2}{3}.$$

7. 把积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 化为三次积分，其中积分区域 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$，$y=x^2$ 及平面 $y=1$，$z=0$ 所围成的闭区域.

解　Ω 为一曲顶柱体，其顶为 $z=x^2+y^2$，底位于 xOy 面上，其侧面由抛物柱面 $y=x^2$ 及平面 $y=1$ 所组成. 由此可知 Ω 在 xOy 面上的投影区域
$$D_{xy} = \{(x,y)\mid x^2\leqslant y\leqslant 1,\ -1\leqslant x\leqslant 1\}.$$

因此
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

8. 计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是两个球：$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz\,(R>0)$ 的公共部分；

(2) $\iiint\limits_{\Omega} \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域；

(3) $\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由 xOy 平面上曲线 $y^2=2x$ 绕 x 轴旋转而成

的曲面与平面 $x=5$ 所围成的闭区域.

解 (1) 解法一 利用直角坐标,采用"先重后单"的积分次序.

由 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2,\\x^2+y^2+z^2=2Rz\end{cases}$ 解得 $z=\dfrac{R}{2}$,于是用平面 $z=\dfrac{R}{2}$ 把 Ω 分成 Ω_1 和 Ω_2 两部分,其中

$$\Omega_1=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2\leqslant 2Rz-z^2,0\leqslant z\leqslant\frac{R}{2}\right\};$$

$$\Omega_2=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2\leqslant R^2-z^2,\frac{R}{2}\leqslant z\leqslant R\right\}\text{(图 10-66)}.$$

于是

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\iiint_{\Omega_1}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_{\Omega_2}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\int_0^{\frac{R}{2}}z^2\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant 2Rz-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\\&\quad\int_{\frac{R}{2}}^{R}z^2\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\frac{R}{2}}\pi(2Rz-z^2)\cdot z^2\mathrm{d}z+\\&\quad\int_{\frac{R}{2}}^{R}\pi(R^2-z^2)\cdot z^2\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{40}\pi R^5+\frac{47}{480}\pi R^5=\frac{59}{480}\pi R^5.\end{aligned}$$

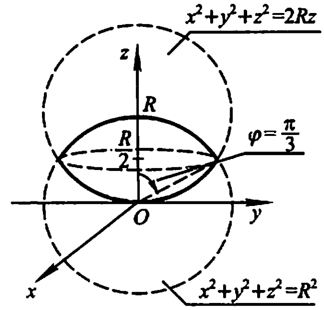


图 10-66

*解法二 利用球面坐标计算. 作圆锥面 $\varphi=\arccos\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{3}$,将 Ω 分成 Ω_1' 和 Ω_2' 两部分:

$$\Omega_1'=\left\{(r,\varphi,\theta)\,\middle|\,0\leqslant r\leqslant R,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{3},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right\};$$

$$\Omega_2'=\left\{(r,\varphi,\theta)\,\middle|\,0\leqslant r\leqslant 2R\cos\varphi,\frac{\pi}{3}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right\}.$$

于是

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\iiint_{\Omega_1}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_{\Omega_2}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}r^4\mathrm{d}r+\\&\quad\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^4\mathrm{d}r\\&=\frac{7}{60}\pi R^5+\frac{1}{160}\pi R^5=\frac{59}{480}\pi R^5.\end{aligned}$$

(2) 由于积分区域 Ω 关于 xOy 面对称，而被积函数关于 z 是奇函数，故所求积分等于零.

(3) 积分区域 Ω 由旋转抛物面 $y^2+z^2=2x$ 和平面 $x=5$ 所围成，Ω 在 yOz 面上的投影区域

$$D_{yz}=\{(y,z)\mid y^2+z^2\leqslant 10\}.$$

因此 Ω 可表示为

$$\frac{1}{2}(y^2+z^2)\leqslant x\leqslant 5,\quad 0\leqslant y^2+z^2\leqslant 10.$$

于是

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\mathrm{d}v&=\iint\limits_{D_{yz}}(y^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\int_{\frac{y^2+z^2}{2}}^{5}\mathrm{d}x\\&=\iint\limits_{D_{yz}}(y^2+z^2)\left(5-\frac{y^2+z^2}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&\xlongequal{\text{极坐标}}\iint\limits_{D_{yz}}\rho^2\left(5-\frac{\rho^2}{2}\right)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{10}}\rho^3\left(5-\frac{\rho^2}{2}\right)\mathrm{d}\rho\\&=\frac{250}{3}\pi.\end{aligned}$$

注 根据本题的积分区域 Ω 的特点，应将 Ω 向 yOz 面投影，即采用先对 x、后对 y 和 z 的积分次序较宜.

*9. 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零，

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v}{\iint\limits_{D(t)}f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma},$$

$$G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)}f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^{t}f(x^2)\mathrm{d}x},$$

其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\}$，$D(t)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2\}$.

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性；

(2) 证明当 $t>0$ 时，$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$.

解 (1) 利用球面坐标，

$$\iiint\limits_{\Omega(t)}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{t}f(r^2)r^2\mathrm{d}r=4\pi\int_0^{t}f(r^2)r^2\mathrm{d}r,$$

利用极坐标，

$$\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho=2\pi\int_0^t f(\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r.$$

于是

$$F(t)=\frac{2\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r},$$

求导得

$$F'(t)=\frac{2tf(t^2)\int_0^t f(r^2)r(t-r)\mathrm{d}r}{\left[\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r\right]^2},$$

所以在区间$(0,+\infty)$内，$F'(t)>0$，故 $F(t)$在$(0,+\infty)$内单调增加.

(2) **证** 因为 $f(x^2)$为偶函数，故

$$\int_{-t}^t f(x^2)\mathrm{d}x=2\int_0^t f(x^2)\mathrm{d}x=2\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r.$$

所以

$$G(t)=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}{2\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r}=\frac{\pi\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r}.$$

要证明 $t>0$ 时，$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$，即证

$$\frac{2\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}>\frac{2\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r},$$

只需证当 $t>0$ 时，$H(t)=\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r\cdot\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r-\left[\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r\right]^2>0.$

由于 $H(0)=0$，且

$$H'(t)=f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)^2\mathrm{d}r>0,$$

所以 $H(t)$在$(0,+\infty)$内单调增加，又 $H(t)$在$[0,+\infty)$上连续，故当 $t>0$ 时，

$$H(t)>H(0)=0.$$

因此当 $t>0$ 时，有

$$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t).$$

10. 求平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$被三坐标面所割出的有限部分的面积.

解 平面方程为$z=c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y$，它被三坐标面割出的有限部分在$xOy$面上的投影区域$D_{xy}$为由$x$轴、$y$轴和直线$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$所围成的三角形区域. 于是所求面积为

$$
\begin{aligned}
A &= \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{ab}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{ab}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\cdot\frac{1}{2}ab \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.
\end{aligned}
$$

11. 在均匀的半径为R的半圆形薄片的直径上，要接上一个一边与直径等长的同样材料的均匀矩形薄片，为了使整个均匀薄片的质心恰好落在圆心上，问接上去的均匀矩形薄片另一边的长度应是多少?

解 设矩形另一边的长度为l并建立如图 10−67 所示的坐标系，则质心的纵标

$$
\bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma}{A}=\frac{\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-l}^{\sqrt{R^2-x^2}}y\,\mathrm{d}y}{A}
=\frac{\int_{-R}^{R}(R^2-x^2-l^2)\mathrm{d}x}{2A}=\frac{\frac{2}{3}R^3-l^2R}{A},
$$

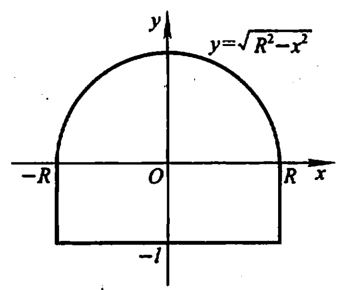


图 10−67

由题设$\bar{y}=0$即可算得

$$
l=\sqrt{\frac{2}{3}}R.
$$

12. 求由抛物线$y=x^2$及直线$y=1$所围成的均匀薄片(面密度为常数μ)对于直线$y=-1$的转动惯量.

解 闭区域$D=\{(x,y)\mid -\sqrt{y}\leqslant x\leqslant\sqrt{y},0\leqslant y\leqslant 1\}$，所求的转动惯量为

$$
I=\iint\limits_D \mu(y+1)^2\mathrm{d}\sigma=\mu\int_0^1(y+1)^2\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}x
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\mu\int_0^1 \sqrt{y}(y+1)^2 \mathrm{d}y \\
&= 2\mu\int_0^1 (y^{\frac{5}{2}} + 2y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{1}{2}})\mathrm{d}y \\
&= \frac{368}{105}\mu.
\end{aligned}
$$

13. 设在 xOy 面上有一质量为 M 的匀质半圆形薄片，占有平面闭区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2, y\geqslant 0\}$，过圆心 O 垂直于薄片的直线上有一质量为 m 的质点 P，$OP=a$. 求半圆形薄片对质点 P 的引力.

解 求解本题时，所有的分析和计算过程均与习题 10－4 的第 13 题雷同，故这里略去详细的计算步骤.

积分区域 $D=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant R, 0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$.

由于 D 关于 y 轴对称，且质量均匀分布，故 $F_x=0$. 又薄片的面密度 $\mu=\dfrac{M}{\frac{1}{2}\pi R^2}=\dfrac{2M}{\pi R^2}$，于是

$$
\begin{aligned}
F_y &= Gm\mu\iint_D \frac{y}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma \\
&\xlongequal{\text{极坐标}} Gm\mu\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \frac{\rho\sin\theta}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\rho\mathrm{d}\rho \\
&= 2Gm\mu\int_0^R \frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{4GmM}{\pi R^2}\left[\ln\frac{\sqrt{R^2+a^2}+R}{a} - \frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}\right];
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_z &= -Gam\mu\iint_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= -Gam\mu\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \frac{\rho}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\rho \\
&= -\frac{2GamM}{R^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}\right) \\
&= -\frac{2GmM}{R^2}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\right),
\end{aligned}
$$

所求引力为 $\boldsymbol{F}=(0,F_y,F_z)$.

14. 求质量分布均匀的半个旋转椭球体 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}\leqslant 1, z\geqslant 0\right\}$ 的质心.

解 设质心为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性知质心位于 z 轴上，即 $\bar{x}=\bar{y}=0$. 由于

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v = \int_0^b z\mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \left(\text{其中 } D_z = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant a^2\left(1-\frac{z^2}{b^2}\right)\right\}\right)$$

$$= \int_0^b \pi a^2\left(1-\frac{z^2}{b^2}\right)z\mathrm{d}z$$

$$= \pi a^2 \int_0^b \left(z-\frac{z^3}{b^2}\right)\mathrm{d}z = \frac{\pi a^2 b^2}{4},$$

$$V = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi a^2 b = \frac{2\pi a^2 b}{3},$$

因此
$$\bar{z} = \frac{\frac{\pi a^2 b^2}{4}}{\frac{2\pi a^2 b}{3}} = \frac{3b}{8},$$

即质心为$\left(0,0,\frac{3b}{8}\right)$.

*15. 一球形行星的半径为R，其质量为M，其密度呈球对称分布，并向着球心线性增加.若行星表面的密度为零，那么行星中心的密度是多少？

解　设行星中心的密度为μ_0，则由题设，在距球心$r(0\leqslant r\leqslant R)$处的密度为$\mu(r)=\mu_0-kr$.由于$\mu(R)=\mu_0-kR=0$，故$k=\frac{\mu_0}{R}$，即

$$\mu(r)=\mu_0\left(1-\frac{r}{R}\right).$$

于是，

$$M = \iiint\limits_{r\leqslant R} \mu_0\left(1-\frac{r}{R}\right)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$= \mu_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^R\left(1-\frac{r}{R}\right)r^2\mathrm{d}r$$

$$= 4\pi\mu_0\int_0^R\left(1-\frac{r}{R}\right)r^2\mathrm{d}r = \frac{\mu_0\pi R^3}{3},$$

因此得
$$\mu_0=\frac{3M}{\pi R^3}.$$

第十一章 曲线积分与曲面积分

习题 11-1 对弧长的曲线积分

1. 设在 xOy 面内有一分布着质量的曲线弧 L，在点 (x,y) 处它的线密度为 $\mu(x,y)$. 用对弧长的曲线积分分别表达：

(1) 这曲线弧对 x 轴、对 y 轴的转动惯量 I_x、I_y；

(2) 这曲线弧的质心坐标 $\bar{x}$、$\bar{y}$.

解 (1) 设想将 L 分成 n 个小弧段，取出其中任意一段记作 ds(其长度也记作 ds)，(x,y) 为 ds 上一点，则 ds 对 x 轴和对 y 轴的转动惯量的近似值分别为

$$dI_x = y^2\mu(x,y)ds; \qquad dI_y = x^2\mu(x,y)ds.$$

以此作为转动惯量元素并积分，即得 L 对 x 轴、对 y 轴的转动惯量：

$$I_x = \int_L y^2\mu(x,y)ds; \qquad I_y = \int_L x^2\mu(x,y)ds.$$

(2) ds 对 x 轴和对 y 轴的静矩的近似值分别为

$$dM_x = y\mu(x,y)ds; \qquad dM_y = x\mu(x,y)ds.$$

以此作为静矩元素并积分，即得 L 对 x 轴、对 y 轴的静矩：

$$M_x = \int_L y\mu(x,y)ds; \qquad M_y = \int_L x\mu(x,y)ds.$$

从而 L 的质心坐标为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_L x\mu(x,y)ds}{\int_L \mu(x,y)ds}; \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_L y\mu(x,y)ds}{\int_L \mu(x,y)ds}.$$

2. 利用对弧长的曲线积分的定义证明性质 3.

证 设对积分弧段 L 任意分割成 n 个小弧段，第 i 个小弧段的长度为 Δs_i，(ξ_i,η_i) 为第 i 个小弧段上任意取定的一点. 按假设，有

$$f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \leqslant g(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i (i=1,2,\cdots,n),$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i.$$

令 $\lambda=\max\{\Delta s_i\}\to 0$，上式两端同时取极限，即得

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s \leqslant \int_L g(x,y)\mathrm{d}s.$$

又 $\quad f(x,y) \leqslant |f(x,y)|,\ -f(x,y) \leqslant |f(x,y)|$，利用以上结果，得

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s \leqslant \int_L |f(x,y)|\mathrm{d}s,$$

$$-\int_L f(x,y)\mathrm{d}s \leqslant \int_L |f(x,y)|\mathrm{d}s,$$

即

$$\left|\int_L f(x,y)\mathrm{d}s\right| \leqslant \int_L |f(x,y)|\mathrm{d}s.$$

3. 计算下列对弧长的曲线积分：

(1) $\oint_L (x^2+y^2)^n \mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x = a\cos t, y = a\sin t (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$；

(2) $\int_L (x+y)\mathrm{d}s$，其中 L 为连接 $(1,0)$ 及 $(0,1)$ 两点的直线段；

(3) $\oint_L x\mathrm{d}s$，其中 L 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域的整个边界；

(4) $\oint_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界；

(5) $\int_\Gamma \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s$，其中 Γ 为曲线 $x=\mathrm{e}^t\cos t, y=\mathrm{e}^t\sin t, z=\mathrm{e}^t$ 上相应于 t 从 0 变到 2 的这段弧；

(6) $\int_\Gamma x^2yz\mathrm{d}s$，其中 Γ 为折线 $ABCD$，这里 A、B、C、D 依次为点 $(0,0,0)$、$(0,0,2)$、$(1,0,2)$、$(1,3,2)$；

(7) $\int_L y^2\mathrm{d}s$，其中 L 为摆线的一拱 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$；

(8) $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s$，其中 L 为曲线 $x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

解 (1) $\oint_L (x^2+y^2)^n\mathrm{d}s$

$$= \int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)^n\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} a^{2n+1}\mathrm{d}t = 2\pi a^{2n+1}.$$

(2) 直线 L 的方程为 $y=1-x(0\leqslant x\leqslant 1)$.

$$\int_L (x+y)\mathrm{d}s = \int_0^1 [x+(1-x)]\sqrt{1+(-1)^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{2}\mathrm{d}x = \sqrt{2}.$$

(3) L 由 L_1 和 L_2 两段组成，其中 $L_1: y=x(0\leqslant x\leqslant 1)$；$L_2: y=x^2(0\leqslant x\leqslant 1)$. 于是

$$\oint_L x\,\mathrm{d}s=\int_{L_1} x\,\mathrm{d}s+\int_{L_2} x\,\mathrm{d}s=\int_0^1 x\sqrt{1+1^2}\,\mathrm{d}x+\int_0^1 x\sqrt{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 \sqrt{2}x\,\mathrm{d}x+\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}+6\sqrt{2}-1).$$

(4) L 由线段 $OA: y=0(0\leqslant x\leqslant a)$，圆弧 $\widehat{AB}$: $x=a\cos t, y=a\sin t\ \left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 和线段 $OB: y=x\ \left(0\leqslant x\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ 组成(图 11－1).

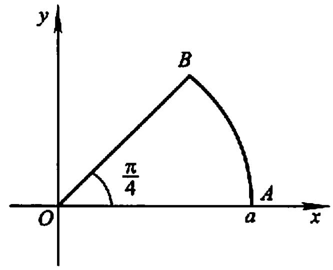


图 11－1

$$\int_{OA} \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s=\int_0^a \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^a-1;$$

$$\int_{\widehat{AB}} \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^a\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\mathrm{e}^a\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}a\mathrm{e}^a;$$

$$\int_{OB} \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \mathrm{e}^{\sqrt{2}x}\sqrt{1+1^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^a-1,$$

于是 $$\int_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s=\mathrm{e}^a-1+\frac{\pi}{4}a\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^a-1=\mathrm{e}^a\left(2+\frac{\pi a}{4}\right)-2.$$

(5) $$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{(\mathrm{e}^t\cos t-\mathrm{e}^t\sin t)^2+(\mathrm{e}^t\sin t+\mathrm{e}^t\cos t)^2+(\mathrm{e}^t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{3}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_\Gamma \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}s=\int_0^2 \frac{1}{\mathrm{e}^{2t}\cos^2 t+\mathrm{e}^{2t}\sin^2 t+\mathrm{e}^{2t}}\cdot\sqrt{3}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\mathrm{e}^{-2}).$$

(6) Γ 由直线段 AB、BC 和 CD 组成，其中

$AB: x=0, y=0, z=t(0\leqslant t\leqslant 2)$；$BC: x=t, y=0, z=2(0\leqslant t\leqslant 1)$；

$CD: x=1, y=t, z=2(0\leqslant t\leqslant 3)$.

于是 $$\int_\Gamma x^2yz\,\mathrm{d}s=\int_{AB} x^2yz\,\mathrm{d}s+\int_{BC} x^2yz\,\mathrm{d}s+\int_{CD} x^2yz\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^2 0\mathrm{d}t+\int_0^1 0\mathrm{d}t+\int_0^3 2t\,\mathrm{d}t=9.$$

(7) $\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t$

$$=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\mathrm{d}t=\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}\mathrm{d}t,$$

$$\int_L y^2\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\cdot\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{2}a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}t=\sqrt{2}a^3\int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{u=\frac{t}{2}}16a^3\int_0^{\pi}\sin^5 u\mathrm{d}u$$

$$=32a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 u\mathrm{d}u^{①}=32a^3\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{256}{15}a^3.$$

(8) $\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t$

$$=\sqrt{(at\cos t)^2+(at\sin t)^2}\mathrm{d}t=at\mathrm{d}t,$$

$$\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}[a^2(\cos t+t\sin t)^2+a^2(\sin t-t\cos t)^2]\cdot at\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}a^3(1+t^2)t\mathrm{d}t=2\pi^2a^3(1+2\pi^2).$$

4. 求半径为 a、中心角为 2φ 的均匀圆弧(线密度 $\mu=1$)的质心.

解 取坐标系如图 11−2 所示,则由对称性知

$$\overline{y}=0.$$

又 $M=\int_L\mu\mathrm{d}s=\int_L\mathrm{d}s=2\varphi a$ (也可由圆弧的弧长公式直接得出),

故
$$\overline{x}=\frac{\int_L x\mu\mathrm{d}s}{M}=\frac{\int_{-\varphi}^{\varphi}a\cos t\cdot a\mathrm{d}t}{2\varphi a}$$

$$=\frac{2a^2\sin\varphi}{2\varphi a}=\frac{a\sin\varphi}{\varphi},$$

所求圆弧的质心的位置为$\left(\frac{a\sin\varphi}{\varphi},0\right)$.

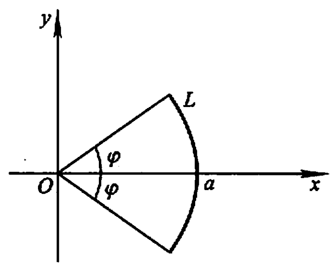


图 11−2

5. 设螺旋形弹簧一圈的方程为 $x=a\cos t,y=a\sin t,z=kt$,其中 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$,它的线密度 $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$,求:

① 参阅上册第五章第 3 节例 12.

(1) 它关于 z 轴的转动惯量 I_z；

(2) 它的质心.

解 (1) $I_z=\int_L(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_L(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$

$$=\int_0^{2\pi}a^2(a^2+k^2t^2)\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+k^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=a^2\sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{3}\pi a^2\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2).$$

(2) 设质心位置为 $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$.

$$M=\int_L\rho(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_L(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2),$$

$$\overline{x}=\frac{1}{M}\int_L x\rho(x,y,z)\mathrm{d}s=\frac{1}{M}\int_L x(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}a\cos t(a^2+k^2t^2)\cdot\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a\sqrt{a^2+k^2}}{M}\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\cos t\,\mathrm{d}t,$$

由于 $\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\cos t\,\mathrm{d}t=[(a^2+k^2t^2)\sin t]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin t\cdot 2k^2t\,\mathrm{d}t$

$$=[2k^2t\cos t]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}2k^2\cos t\,\mathrm{d}t=4\pi k^2,$$

因此 $$\overline{x}=\frac{a\sqrt{a^2+k^2}\cdot 4\pi k^2}{\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2)}=\frac{6ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2}.$$

类似的，$\overline{y}=\frac{1}{M}\int_L y(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{a\sqrt{a^2+k^2}}{M}\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sin t\,\mathrm{d}t$

$$=\frac{a\sqrt{a^2+k^2}\cdot(-4\pi^2k^2)}{M}=\frac{-6\pi ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2}.$$

$$\overline{z}=\frac{1}{M}\int_L z(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{k\sqrt{a^2+k^2}}{M}\int_0^{2\pi}t(a^2+k^2t^2)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{k\sqrt{a^2+k^2}(2a^2\pi^2+4k^2\pi^4)}{M}=\frac{3\pi k(a^2+2\pi^2k^2)}{3a^2+4\pi^2k^2}.$$

对坐标的曲线积分

1. 设 L 为 xOy 面内直线 $x=a$ 上的一段,证明:

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = 0.$$

证 将 L 的方程表达为如下的参数形式:

$$\begin{cases} x=a, \\ y=t, \end{cases} \quad t \text{ 从 } \alpha \text{ 变到 } \beta.$$

于是由第二类曲线积分的计算公式,得

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta P(a,t)\cdot 0\mathrm{d}t = 0.$$

注 本题给出了第二类曲线积分的一个重要性质:

如果 L 为垂直于 x 轴的有向线段,则 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = 0$;如果 L 为垂直于 y 轴的有向线段,则 $\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$. 这一性质常被用来简化第二类曲线积分的计算.

2. 设 L 为 xOy 面内 x 轴上从点 $(a,0)$ 到点 $(b,0)$ 的一段直线,证明:

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b P(x,0)\mathrm{d}x.$$

证 将 L 的方程表达为如下的参数形式:

$$\begin{cases} x=x, \\ y=0, \end{cases} \quad x \text{ 从 } a \text{ 变到 } b,$$

于是

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b P(x,0)\mathrm{d}x.$$

3. 计算下列对坐标的曲线积分:

(1) $\int_L (x^2-y^2)\mathrm{d}x$,其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(2,4)$ 的一段弧;

(2) $\oint_L xy\mathrm{d}x$,其中 L 为圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2\ (a>0)$ 及 x 轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界(按逆时针方向绕行);

(3) $\int_L y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$,其中 L 为圆周 $x=R\cos t$,$y=R\sin t$ 上对应 t 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 的一段弧;

(4) $\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$（按逆时针方向绕行）；

(5) $\int_\Gamma x^2\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z$，其中 Γ 为曲线 $x=k\theta, y=a\cos\theta, z=a\sin\theta$ 上对应 θ 从 0 到 π 的一段弧；

(6) $\int_\Gamma x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+(x+y-1)\mathrm{d}z$，其中 Γ 是从点(1,1,1)到点(2,3,4)的一段直线；

(7) $\oint_\Gamma \mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z$，其中 Γ 为有向闭折线 $ABCA$，这里的 A、B、C 依次为点(1,0,0)、(0,1,0)、(0,0,1)；

(8) $\int_L (x^2-2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点(−1,1)到点(1,1)的一段弧.

解 (1) $\int_L (x^2-y^2)\mathrm{d}x=\int_0^2(x^2-x^4)\mathrm{d}x$

$$=-\frac{56}{15}.$$

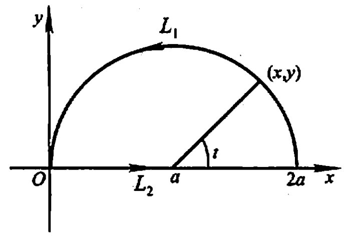


图 11−3

(2) 如图 11−3，L 由 L_1 和 L_2 所组成，其中 L_1 为有向半圆弧：

$$\begin{cases}x=a+a\cos t,\\ y=a\sin t,\end{cases}\quad t\text{ 从 0 变到 }\pi;$$

L_2 为有向线段 $y=0$，x 从 0 变到 $2a$. 于是

$$\begin{aligned}\oint_L xy\mathrm{d}x&=\int_{L_1}xy\mathrm{d}x+\int_{L_2}xy\mathrm{d}x\\&=\int_0^\pi a(1+\cos t)\cdot a\sin t\cdot(-a\sin t)\mathrm{d}t+0\\&=-a^3\left(\int_0^\pi \sin^2 t\mathrm{d}t+\int_0^\pi\sin^2 t\cos t\mathrm{d}t\right)\\&=-a^3\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=-\frac{\pi}{2}a^3.\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\int_L y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[R\sin t\cdot(-R\sin t)+R\cos t\cdot R\cos t]\mathrm{d}t\\&=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\mathrm{d}t=0.\end{aligned}$$

(4) L 的参数方程为 $x=a\cos t, y=a\sin t$，t 从 0 变到 2π. 于是

原式$=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}[a(\cos t+\sin t)\cdot(-a\sin t)-a(\cos t-\sin t)\cdot a\cos t]\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}(-a^2)\mathrm{d}t=-2\pi.$$

(5) $\int_\Gamma x^2\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z$

$$=\int_0^\pi[k^2\theta^2\cdot k+a\cos\theta\cdot(-a\sin\theta)-a\cos\theta\cdot(a\cos\theta)]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^\pi(k^3\theta^2-a^2)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}k^3\pi^3-a^2\pi.$$

(6) 直线Γ的参数方程为:$x=1+t,y=1+2t,z=1+3t$,t从0变到1. 于是

$$原式=\int_0^1[(1+t)\cdot1+(1+2t)\cdot2+(1+t+1+2t-1)\cdot3]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1(6+14t)\mathrm{d}t=13.$$

(7) Γ由有向线段AB、BC、CA依次连接而成,其中

AB:$x=1-t,y=t,z=0$,t从0变到1;

BC:$x=0,y=1-t,z=t$,t从0变到1;

CA:$x=t,y=0,z=1-t$,t从0变到1.

$$\int_{AB}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=\int_0^1[(-1)-1+0]\mathrm{d}t=-2;$$

$$\int_{BC}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=\int_0^1[0-(-1)+(1-t)\cdot1]\mathrm{d}t=\int_0^1(2-t)\mathrm{d}t=\frac{3}{2};$$

$$\int_{CA}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=\int_0^1(1-0+0)\mathrm{d}t=1,$$

因此
$$\oint_\Gamma\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=-2+\frac{3}{2}+1=\frac{1}{2}.$$

(8) $\int_L(x^2-2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$

$$=\int_{-1}^1[(x^2-2x\cdot x^2)+(x^4-2x\cdot x^2)\cdot2x]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^1(2x^5-4x^4-2x^3+x^2)\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^1(-4x^4+x^2)\mathrm{d}x=-\frac{14}{15}.$$

4. 计算$\int_L(x+y)\,\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$,其中$L$是:

(1) 抛物线$y^2=x$上从点(1,1)到点(4,2)的一段弧;

(2) 从点(1,1)到点(4,2)的直线段;

(3) 先沿直线从点(1,1)到点(1,2),然后再沿直线到点(4,2)的折线;

(4) 曲线$x=2t^2+t+1,y=t^2+1$上从点(1,1)到点(4,2)的一段弧.

解 (1) 化为对 y 的定积分. $L: x=y^2$, y 从 1 变到 2,

$$\text{原式}=\int_1^2[(y^2+y)\cdot 2y+(y-y^2)\cdot 1]\mathrm{d}y$$
$$=\int_1^2(2y^3+y^2+y)\mathrm{d}y=\frac{34}{3}.$$

(2) L 的方程为 $y-1=\frac{2-1}{4-1}(x-1)$,即 $x=3y-2$, y 从 1 变到 2. 化为对 y 的定积分计算,有

$$\text{原式}=\int_1^2[(3y-2+y)\cdot 3+(y-3y+2)\cdot 1]\mathrm{d}y$$
$$=\int_1^2(10y-4)\mathrm{d}y=11.$$

(3) 记 L_1 为从点(1,1)到点(1,2)的有向线段, L_2 为从点(1,2)到点(4,2)的有向线段. 则 $L_1: x=1$, y 从 1 变到 2; $L_2: y=2$, x 从 1 变到 4. 在 L_1 上, $\mathrm{d}x=0$; 在 L_2 上, $\mathrm{d}y=0$. 于是

$$\int_{L_1}(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_1^2(y-1)\mathrm{d}y=\frac{1}{2};$$
$$\int_{L_2}(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_1^4(x+2)\mathrm{d}x=\frac{27}{2},$$

因此 $$\text{原式}=\frac{1}{2}+\frac{27}{2}=14.$$

(4) 由 $\begin{cases}2t^2+t+1=1,\\ t^2+1=1\end{cases}$ 可得 $t=0$; 由 $\begin{cases}2t^2+t+1=4,\\ t^2+1=2\end{cases}$ 可得 $t=1$. 因此

$$\text{原式}=\int_0^1[(2t^2+t+1+t^2+1)\cdot(4t+1)+(t^2+1-2t^2-t-1)\cdot 2t]\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1(10t^3+5t^2+9t+2)\mathrm{d}t=\frac{32}{3}.$$

5. 一力场由沿横轴正方向的常力 $\boldsymbol{F}$ 所构成. 试求当一质量为 m 的质点沿圆周 $x^2+y^2=R^2$ 按逆时针方向移过位于第一象限的那一段弧时场力所作的功.

解 依题意, $\boldsymbol{F}=(|\boldsymbol{F}|,0)$, $L: x=R\cos t, y=R\sin t$, t 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$, 因此

$$W=\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_L|\boldsymbol{F}|\mathrm{d}x+0\mathrm{d}y$$
$$=|\boldsymbol{F}|\int_0^{\frac{\pi}{2}}-R\sin t\mathrm{d}t=-|\boldsymbol{F}|R.$$

6. 设 z 轴与重力的方向一致,求质量为 m 的质点从位置 (x_1,y_1,z_1) 沿直线移到 (x_2,y_2,z_2) 时重力所作的功.

解 重力 $\boldsymbol{F}=(0,0,mg)$, 质点移动的直线路径 L 的方程为

$$\begin{cases}x=x_1+(x_2-x_1)t,\\ y=y_1+(y_2-y_1)t, \quad t\text{ 从 0 变到 1}.\\ z=z_1+(z_2-z_1)t,\end{cases}$$

于是
$$W=\int_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_L 0\mathrm{d}x+0\mathrm{d}y+mg\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^1 mg(z_2-z_1)\mathrm{d}t=mg(z_2-z_1).$$

7. 把对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 化成对弧长的曲线积分,其中 L 为:

(1) 在 xOy 面内沿直线从点(0,0)到点(1,1);

(2) 沿抛物线 $y=x^2$ 从点(0,0)到点(1,1);

(3) 沿上半圆周 $x^2+y^2=2x$ 从点(0,0)到点(1,1).

解 (1) L 为从点(0,0)到(1,1)的有向线段,其上任一点处的切向量的方向余弦满足 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,于是

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s$$
$$=\int_L\frac{P(x,y)+Q(x,y)}{\sqrt{2}}\mathrm{d}s.$$

(2) L 由如下的参数方程给出:$x=x,y=x^2$,x 从 0 变到 1,故 L 的切向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x)}}=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}},\cos\beta=\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}=\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}},$$

于是
$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L\frac{P(x,y)+2xQ(x,y)}{\sqrt{1+4x^2}}\mathrm{d}s\,.$$

(3) L 由如下的参数方程给出:$x=x,y=\sqrt{2x-x^2}$,x 从 0 变到 1,故 L 的切向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x)}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)^2}}=\sqrt{2x-x^2};$$

$$\cos\beta=\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\cdot\sqrt{2x-x^2}=1-x,$$

于是

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L[\sqrt{2x-x^2}\,P(x,y)+(1-x)Q(x,y)]\mathrm{d}s.$$

8. 设 Γ 为曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上相应于 t 从 0 变到 1 的曲线弧. 把对坐

标的曲线积分 $\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 化成对弧长的曲线积分.

解 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2t=2x,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=3t^2=3y$，注意到参数 t 由小变到大，因此 Γ 的切向量的方向余弦为：

$$\cos\alpha=\frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}}=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}};$$

$$\cos\beta=\frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}}=\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}};$$

$$\cos\gamma=\frac{z'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}}=\frac{3y}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}.$$

从而
$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_\Gamma\frac{P+2xQ+3yR}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}\mathrm{d}s.$$

习题 11-3 格林公式及其应用

1. 计算下列曲线积分，并验证格林公式的正确性：

(1) $\oint_L(2xy-x^2)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y$，其中 L 是由抛物线 $y=x^2$ 和 $y^2=x$ 所围成的区域的正向边界曲线；

(2) $\oint_L(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$，其中 L 是四个顶点分别为(0,0)、(2,0)、(2,2)和(0,2)的正方形区域的正向边界.

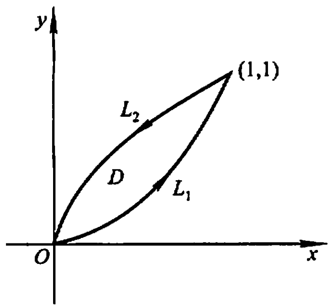


图 11-4

解 (1) 先按曲线积分的计算公式直接计算. 记 $L_1:y=x^2$，x 从 0 变到 1；$L_2:x=y^2$，y 从 1 变到 0 (图 11-4). 于是

$$\begin{aligned}原式&=\int_{L_1}(2xy-x^2)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y+\int_{L_2}(2xy-x^2)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1[(2x^3-x^2)+(x+x^4)\cdot2x]\mathrm{d}x+\int_1^0[(2y^3-y^4)\cdot2y+(y^2+y^2)]\mathrm{d}y\\&=\int_0^1(2x^5+2x^3+x^2)\mathrm{d}x+\int_1^0(-2y^5+4y^4+2y^2)\mathrm{d}y\\&=\frac{7}{6}-\frac{17}{15}=\frac{1}{30}.\end{aligned}$$

又，$P=2xy-x^2,Q=x+y^2,\frac{\partial P}{\partial y}=2x,\frac{\partial Q}{\partial x}=1$，

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D(1-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1(1-2x)\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}y=\int_0^1(1-2x)(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1(x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}-x^2+2x^3)\mathrm{d}x=\frac{1}{30}.$$

可见 $$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 如图 11－5. L 由有向线段 OA、AB、BC 和 CO 组成.

$$\int_{OA}(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{3};$$

$$\int_{AB}(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y=\int_0^2(y^2-4y)\mathrm{d}y=\frac{8}{3}-8;$$

$$\int_{BC}(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y=\int_2^0(x^2-8x)\mathrm{d}x=16-\frac{8}{3};$$

$$\int_{CO}(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y=\int_2^0 y^2\mathrm{d}y=-\frac{8}{3},$$

于是 原式 $=\frac{8}{3}+\left(\frac{8}{3}-8\right)+\left(16-\frac{8}{3}\right)+\left(-\frac{8}{3}\right)=8.$

又 $$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2y,\frac{\partial P}{\partial y}=-3xy^2,$$

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D(-2y+3xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2(-2y+3xy^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2(8x-4)\mathrm{d}x=8,$$

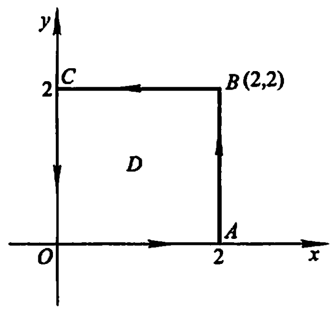


图 11－5

可见 $$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2. 利用曲线积分，求下列曲线所围成的图形的面积：

(1) 星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$；

(2) 椭圆 $9x^2+16y^2=144$；

(3) 圆 $x^2+y^2=2ax$.

解 (1) 正向星形线的参数方程中的参数 t 从 0 变到 2π，因此

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos^3 t(3a\sin^2 t\cos t)-a\sin^3 t(3a\cos^2 t)(-\sin t)]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{8}(1-\cos 4t)\mathrm{d}t = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

(2) 正向椭圆 $9x^2+16y^2=144$ 的参数方程为

$$x = 4\cos t, y = 3\sin t, t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 2\pi.$$

$$A = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[4\cos t \cdot 3\cos t - 3\sin t(-4\sin t)]\mathrm{d}t$$

$$= 6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t = 12\pi.$$

(3) 正向圆周 $x^2+y^2=2ax$，即 $(x-a)^2+y^2=a^2$ 的参数方程为

$$x = a + a\cos t, y = a\sin t, t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 2\pi.$$

$$A = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(a+a\cos t)a\cos t - a\sin t(-a\sin t)]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos t)\mathrm{d}t = \pi a^2.$$

3. 计算曲线积分 $\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}$，其中 L 为圆周 $(x-1)^2+y^2=2$，L 的方向为逆时针方向.

解 在 L 所围的区域内的点 $(0,0)$ 处，函数 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 均无意义. 现取 r 为适当小的正数，使圆周 l(取逆时针向)：$x=r\cos t, y=r\sin t$ (t 从 0 变到 2π) 位于 L 所围的区域内，则在由 L 和 l^- 所围成的复连通区域 D 上(图 11－6)，可应用格林公式，在 D 上，

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

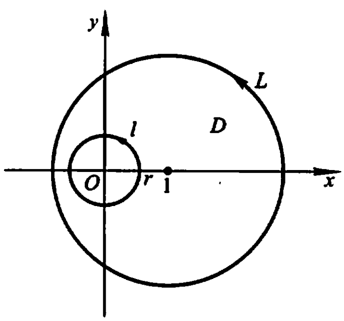


图 11－6

于是由格林公式得

$$\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)} + \oint_{l^-} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

从而 $$\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)} = \oint_l \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{-r^2\sin^2 t-r^2\cos^2 t}{2r^2}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=-\pi.$$

4. 证明下列曲线积分在整个 xOy 面内与路径无关,并计算积分值:

(1) $\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$;

(2) $\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\mathrm{d}y$;

(3) $\int_{(1,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)\mathrm{d}x+(x^2-4xy^3)\mathrm{d}y$.

解 (1) 函数 $P=x+y,Q=x-y$ 在整个 xOy 面这个单连通区域内,具有一阶连续偏导数,且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=1=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故曲线积分在 xOy 面内与路径无关.取折线积分路径 MRN,其中 M 为(1,1),R 为(2,1),N 为(2,3),则有

$$\text{原式}=\int_1^2(x+1)\mathrm{d}x+\int_1^3(2-y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{5}{2}+0=\frac{5}{2}.$$

(2) 函数 $P=6xy^2-y^3,Q=6x^2y-3xy^2$ 在 xOy 面这个单连通域内具有一阶连续偏导数,且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=12xy-3y^2=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故曲线积分在 xOy 面内与路径无关.取折线积分路径 MRN,其中 M 为(1,2),R 为(3,2),N 为(3,4),则有

$$\text{原式}=\int_1^3(24x-8)\mathrm{d}x+\int_2^4(54y-9y^2)\mathrm{d}y$$

$$=80+156=236.$$

(3) 函数 $P=2xy-y^4+3,Q=x^2-4xy^3$ 在 xOy 面这个单连通域内具有一阶连续偏导数,且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-4y^3=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故曲线积分在 xOy 面内与路径无关.取折线积分路径 MRN,其中 M 为(1,0),R 为(2,0),N 为(2,1),则

$$\text{原式}=\int_1^2 3\mathrm{d}x+\int_0^1(4-8y^3)\mathrm{d}y$$

$$=3+2=5.$$

5. 利用格林公式，计算下列曲线积分：

(1) $\oint_L (2x-y+4)\mathrm{d}x+(5y+3x-6)\mathrm{d}y$，其中 L 为三顶点分别为 $(0,0)$、$(3,0)$ 和 $(3,2)$ 的三角形正向边界；

(2) $\oint_L (x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(x^2\sin x-2y\mathrm{e}^x)\mathrm{d}y$，其中 L 为正向星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$；

(3) $\int_L (2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$，其中 L 为在抛物线 $2x=\pi y^2$ 上由点 $(0,0)$ 到 $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 的一段弧；

(4) $\int_L (x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y$，其中 L 是在圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧.

解 (1) 设 D 为 L 所围的三角形闭区域，则由格林公式，

$$\oint_L (2x-y+4)\mathrm{d}x+(5y+3x-6)\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D[3-(-1)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\times(D\text{ 的面积})=4\times 3=12.$$

(2) 由于 $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x\sin x+x^2\cos x-2y\mathrm{e}^x$，

$$\frac{\partial P}{\partial y}=x^2\cos x+2x\sin x-2y\mathrm{e}^x,$$

故由格林公式得

$$\text{原式}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D 0\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

(3) 由于 $P=2xy^3-y^2\cos x$，$Q=1-2y\sin x+3x^2y^2$ 在 xOy 面内具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2y\cos x+6xy^2=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给曲线积分与路径无关. 于是将原积分路径 L 改变为折线路径 ORN，其中 O 为 $(0,0)$，R 为 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$，$N$ 为 $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$（图 11－7），得

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}0\cdot\mathrm{d}x+\int_0^1\left(1-2y\sin\frac{\pi}{2}+3\cdot\frac{\pi^2}{4}y^2\right)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left(1-2y+\frac{3}{4}\pi^2y^2\right)\mathrm{d}y=\frac{\pi^2}{4}.$$

(4) 由于 $P=x^2-y, Q=-(x+\sin^2 y)$ 在 xOy 面内具有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=-1=\frac{\partial P}{\partial y}$，故所给曲线积分与路径无关. 于是将原积分路径 L 改为折线路径 ORN，其中 O 为 $(0,0)$，R 为 $(1,0)$，N 为 $(1,1)$（图 11－8），得

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x - \int_0^1 (1+\sin^2 y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{3} - 1 - \int_0^1 \frac{1-\cos 2y}{2}\mathrm{d}y \\
&= -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin 2 = -\frac{7}{6} + \frac{1}{4}\sin 2.
\end{aligned}
$$

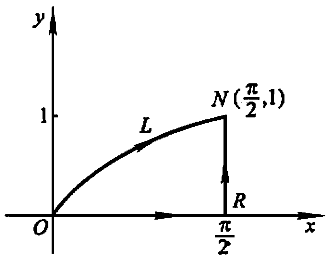


图 11－7

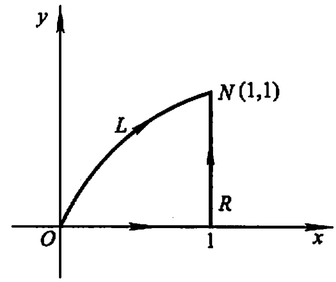


图 11－8

6. 验证下列 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 在整个 xOy 平面内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求这样的一个 $u(x,y)$：

(1) $(x+2y)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$；

(2) $2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$；

(3) $4\sin x\sin 3y\cos x\mathrm{d}x-3\cos 3y\cos 2x\mathrm{d}y$；

(4) $(3x^2y+8xy^2)\mathrm{d}x+(x^3+8x^2y+12ye^y)\mathrm{d}y$；

(5) $(2x\cos y+y^2\cos x)\mathrm{d}x+(2y\sin x-x^2\sin y)\mathrm{d}y$.

解 (1) 在整个 xOy 面内，函数 $P=x+2y$、$Q=2x+y$ 具有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=2=\frac{\partial P}{\partial y}$，因此所给表达式是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分. 取 $(x_0,y_0)=(0,0)$，则有

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \int_0^x x\mathrm{d}x + \int_0^y (2x+y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2}.
\end{aligned}
$$

(2) 在整个 xOy 面内，函数 $P=2xy$ 和 $Q=x^2$ 具有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x=\frac{\partial P}{\partial y}$，故所给表达式是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分. 取 $(x_0,y_0)=(0,0)$，则有

$$u(x,y)=\int_0^x 2x\cdot 0\mathrm{d}x+\int_0^y x^2\mathrm{d}y=x^2y.$$

(3) 在整个 xOy 面内，$P=4\sin x\sin 3y\cos x$ 和 $Q=-3\cos 3y\cos 2x$ 具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=6\cos 3y\sin 2x=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给表达式是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分. 取 $(x_0,y_0)=(0,0)$，则有

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_0^x 0\cdot\mathrm{d}x+\int_0^y(-3\cos 3y\cos 2x)\mathrm{d}y\\&=[-\sin 3y\cos 2x]_0^y\\&=-\cos 2x\sin 3y.\end{aligned}$$

(4) 在整个 xOy 面内，函数 $P=3x^2y+8xy^2$ 和 $Q=x^3+8x^2y+12ye^y$ 具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2+16xy=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给表达式为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分. 取 $(x_0,y_0)=(0,0)$，则有

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_0^x 0\cdot\mathrm{d}x+\int_0^y(x^3+8x^2y+12ye^y)\mathrm{d}y\\&=x^3y+4x^2y^2+12(ye^y-e^y).\end{aligned}$$

(5) **方法一** 在整个 xOy 面内，$P=2x\cos y+y^2\cos x$ 和 $Q=2y\sin x-x^2\sin y$ 具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2y\cos x-2x\sin y=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给表达式是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分. 取 $(x_0,y_0)=(0,0)$，则有

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_0^x 2x\mathrm{d}x+\int_0^y(2y\sin x-x^2\sin y)\mathrm{d}y\\&=y^2\sin x+x^2\cos y.\end{aligned}$$

注 在已经证明了所给表达式 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分后，为了求 $u(x,y)$，除了采用上面题解中的曲线积分方法外，还可用以下两种方法：

方法二 (偏积分法) 因函数 $u(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)=2x\cos y+y^2\cos x,$$

故

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int(2x\cos y+y^2\cos x)\mathrm{d}x\\&=x^2\cos y+y^2\sin x+\varphi(y),\end{aligned}$$

其中 $\varphi(y)$ 是 y 的某个可导函数，由此得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-x^2\sin y+2y\sin x+\varphi'(y).$$

又 $u(x,y)$ 必需满足

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=2y\sin x-x^2\sin y,$$

从而得 $\varphi'(y)=0,\varphi(y)=C$（$C$ 为任意常数）. 因此

$$u(x,y)=x^2\cos y+y^2\sin x+C,$$

取 $C=0$，就得到满足要求的一个 $u(x,y)$.

方法三 利用微分运算法则直接凑出 $u(x,y)$.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(2x\cos y\mathrm{d}x-x^2\sin y\mathrm{d}y)+(y^2\cos x\mathrm{d}x+2y\sin x\mathrm{d}y)\\&=(\cos y\mathrm{d}x^2+x^2\mathrm{d}\cos y)+(y^2\mathrm{d}\sin x+\sin x\mathrm{d}y^2)\\&=\mathrm{d}(x^2\cdot\cos y)+\mathrm{d}(y^2\cdot\sin x)\\&=\mathrm{d}(x^2\cos y+y^2\sin x).\end{aligned}$$

因此可取 $u(x,y)=x^2\cos y+y^2\sin x$.

7. 设有一变力在坐标轴上的投影为 $X=x^2+y^2,Y=2xy-8$，这变力确定了一个力场. 证明质点在此场内移动时，场力所作的功与路径无关.

证 场力所作的功

$$W=\int_L X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y=\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(2xy-8)\mathrm{d}y,$$

由于 $P=x^2+y^2$ 和 $Q=2xy-8$ 在整个 xOy 面内具有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=2y=\frac{\partial P}{\partial y}$，故曲线积分在 xOy 面内与路径无关，即场力所作的功与路径无关.

*8. 判别下列方程中哪些是全微分方程？对于全微分方程，求出它的通解.

(1) $(3x^2+6xy)\mathrm{d}x+(6x^2y+4y^2)\mathrm{d}y=0$;

(2) $(a^2-2xy-y^2)\mathrm{d}x-(x+y)^2\mathrm{d}y=0$;

(3) $\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+(x\mathrm{e}^y-2y)\mathrm{d}y=0$;

(4) $(x\cos y+\cos x)y'-y\sin x+\sin y=0$;

(5) $(x^2-y)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$;

(6) $y(x-2y)\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y=0$;

(7) $(1+\mathrm{e}^{2\theta})\mathrm{d}\rho+2\rho\mathrm{e}^{2\theta}\mathrm{d}\theta=0$;

(8) $(x^2+y^2)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y=0$.

说明

① 在单连通区域内，若 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 有连续的偏导数，则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 是方程 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ 为全微分方程的充要条件. 本题利用这一条件来

判别方程是否为全微分方程.

② 在条件 $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$ 下,存在函数 $u=u(x,y)$,满足 $\mathrm{d}u=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$,而 $u(x,y)=C$ 即是方程 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ 的通解. 函数 $u(x,y)$ 可用三种方法求得,其一为曲线积分法,其二为凑微分法,其三为偏积分法.

解 (1) $\frac{\partial P}{\partial y}=(3x^2+6xy^2)'_y=12xy$;

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=(6x^2y+4y^2)'_x=12xy,$$

因$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$,故原方程是全微分方程.

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_0^x P(x,0)\mathrm{d}x+\int_0^y Q(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^x 3x^2\mathrm{d}x+\int_0^y(6x^2y+4y^2)\mathrm{d}y\\&=x^3+3x^2y^2+\frac{4}{3}y^3,\end{aligned}$$

故所求通解为 $$x^3+3x^2y^2+\frac{4}{3}y^3=C.$$

(2) $\frac{\partial P}{\partial y}=(a^2-2xy-y^2)'_y=-2x-2y$;

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=[-(x+y)^2]'_x=-2(x+y),$$

因$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$,故原方程是全微分方程.

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_0^x P(x,0)\mathrm{d}x+\int_0^y Q(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^x a^2\mathrm{d}x-\int_0^y(x+y)^2\mathrm{d}y=a^2x-\frac{1}{3}(x+y)^3+\frac{1}{3}x^3\\&=a^2x-x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3,\end{aligned}$$

故所求通解为

$$a^2x-x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3=C.$$

(3) $\frac{\partial P}{\partial y}=(\mathrm{e}^y)'_y=\mathrm{e}^y$;$\frac{\partial Q}{\partial x}=(x\mathrm{e}^y-2y)'_x=\mathrm{e}^y$,因$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$,故原方程是全微分方程. 下面用凑微分法求通解:

$$\begin{aligned}\text{方程的左端}&=\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+(x\mathrm{e}^y-2y)\mathrm{d}y\\&=(\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+x\mathrm{e}^y\mathrm{d}y)-2y\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$=\mathrm{d}(xe^y)-\mathrm{d}(y^2)=\mathrm{d}(xe^y-y^2),$$

即原方程为 $$\mathrm{d}(xe^y-y^2)=0,$$

故所求通解为

$$xe^y-y^2=C.$$

(4) 将原方程改写成

$$(\sin y-y\sin x)\mathrm{d}x+(x\cos y+\cos x)\mathrm{d}y=0.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=(\sin y-y\sin x)'_y=\cos y-\sin x,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=(x\cos y+\cos x)'_x=\cos y-\sin x,$$

因$\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,故原方程是全微分方程.

$$\begin{aligned}\text{方程的左端}&=(\sin y-y\sin x)\mathrm{d}x+(x\cos y+\cos x)\mathrm{d}y\\&=(\sin y\mathrm{d}x+x\cos y\mathrm{d}y)+(-y\sin x\mathrm{d}x+\cos x\mathrm{d}y)\\&=\mathrm{d}(x\sin y)+\mathrm{d}(y\cos x),\end{aligned}$$

即原方程为 $$\mathrm{d}(x\sin y+y\cos x)=0,$$

故所求通解为

$$x\sin y+y\cos x=C.$$

(5) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=(x^2-y)'_y=-1,\dfrac{\partial Q}{\partial x}=(-x)'_x=-1$,因$\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,故原方程是全微分方程.

$$\begin{aligned}\text{方程的左端}&=(x^2-y)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y\\&=x^2\mathrm{d}x-(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=\mathrm{d}\left(\frac{x^3}{3}\right)-\mathrm{d}(xy),\end{aligned}$$

即原方程为 $$\mathrm{d}\left(\frac{x^3}{3}-xy\right)=0,$$

故所求通解为

$$\frac{x^3}{3}-xy=C.$$

(6) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=[y(x-2y)]'_y=x-4y,\dfrac{\partial Q}{\partial x}=(-x^2)'_x=-2x$. 因$\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,故原方程不是全微分方程.

(7) $\dfrac{\partial P}{\partial \theta}=(1+e^{2\theta})'_\theta=2e^{2\theta},\dfrac{\partial Q}{\partial \rho}=(2\rho e^{2\theta})'_\rho=2e^{2\theta}$,因$\dfrac{\partial P}{\partial \theta}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial \rho}$,故原方程是全微分方程.

$$\begin{aligned}\text{方程的左端}&=(1+e^{2\theta})\mathrm{d}\rho+2\rho e^{2\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\mathrm{d}\rho+(e^{2\theta}\mathrm{d}\rho+2\rho e^{2\theta}\mathrm{d}\theta)=\mathrm{d}\rho+\mathrm{d}(\rho e^{2\theta}),\end{aligned}$$

即原方程为
$$d(\rho+\rho e^{2\theta})=0,$$
故所求通解为
$$\rho+\rho e^{2\theta}=C.$$
(8) $\frac{\partial P}{\partial y}=(x^2+y^2)'_y=2y,\frac{\partial Q}{\partial x}=(xy)'_x=y$. 因$\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$,故原方程不是全微分方程.

9. 确定常数λ,使在右半平面$x>0$内的向量$\boldsymbol{A}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^\lambda\boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^\lambda\boldsymbol{j}$为某二元函数$u(x,y)$的梯度,并求$u(x,y)$.

解 在单连通域G内,若$P(x,y)$、$Q(x,y)$具有一阶连续偏导数,则向量$\boldsymbol{A}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$为某二元函数$u(x,y)$的梯度(此条件相当于$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$是$u(x,y)$的全微分)的充分必要条件是$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$在$G$内恒成立.

本题中,$P(x,y)=2xy(x^4+y^2)^\lambda,Q(x,y)=-x^2(x^4+y^2)^\lambda$.
$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x(x^4+y^2)^\lambda+2\lambda xy(x^4+y^2)^{\lambda-1}\cdot 2y;$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2x(x^4+y^2)^\lambda-x^2\lambda(x^4+y^2)^{\lambda-1}\cdot 4x^3.$$
由等式$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 得到
$$4x(x^4+y^2)^\lambda(1+\lambda)=0,$$
由于$4x(x^4+y^2)^\lambda>0$,故$\lambda=-1$,即$\boldsymbol{A}(x,y)=\frac{2xy\boldsymbol{i}-x^2\boldsymbol{j}}{x^4+y^2}$.

在半平面$x>0$内,取$(x_0,y_0)=(1,0)$,则得
$$u(x,y)=\int_1^x\frac{2x\cdot 0}{x^4+0^2}dx-\int_0^y\frac{x^2}{x^4+y^2}dy$$
$$=-\arctan\frac{y}{x^2}.$$

习题11-4 对面积的曲面积分

1. 设有一分布着质量的曲面Σ,在点(x,y,z)处它的面密度为$\mu(x,y,z)$,用对面积的曲面积分表示这曲面对于x轴的转动惯量.

解 设想将Σ分成n小块,取出其中任意一块记作dS(其面积也记作dS),(x,y,z)为dS上一点,则dS对x轴的转动惯量近似等于
$$dI_x=(y^2+z^2)\mu(x,y,z)dS.$$
以此作为转动惯量元素并积分,即得Σ对x轴的转动惯量为
$$I_x=\iint_\Sigma(y^2+z^2)\mu(x,y,z)dS.$$

2. 按对面积的曲面积分的定义证明公式

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S + \iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S,$$

其中 Σ 是由 Σ_1 和 Σ_2 组成的.

证 由于 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上可积，故不论把 Σ 如何分割，积分和的极限总是不变的. 因此在分割 Σ 时，可以使 Σ_1 和 Σ_2 的公共边界曲线永远作为一条分割线. 这样，$f(x,y,z)$ 在 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$ 上的积分和等于 Σ_1 上的积分和加上 Σ_2 上的积分和，记为

$$\sum_{(\Sigma_1+\Sigma_2)} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i = \sum_{(\Sigma_1)} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i + \sum_{(\Sigma_2)} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

令 $\lambda=\max\{\Delta S_i \text{ 的直径}\}\to 0$，上式两端同时取极限，即得

$$\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S + \iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

3. 当 Σ 是 xOy 面内的一个闭区域时，曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 与二重积分有什么关系？

解 当 Σ 为 xOy 面内的一个闭区域时，Σ 的方程为 $z=0$，因此在 Σ 上取值的 $f(x,y,z)$ 恒为 $f(x,y,0)$，且 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 又 Σ 在 xOy 面上的投影区域即为 Σ 自身，因此有

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} f(x,y,0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

4. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为抛物面 $z=2-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方的部分，$f(x,y,z)$ 分别如下：

(1) $f(x,y,z)=1$；

(2) $f(x,y,z)=x^2+y^2$；

(3) $f(x,y,z)=3z$.

解 抛物面 Σ 与 xOy 面的交线为 $x^2+y^2=2$，故 Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$. 又

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是，

$$(1)\ \iint\limits_{\Sigma} 1\cdot\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}} \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{12}(1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{6}\pi.$$

(2) $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\xlongequal{\text{极坐标}} \iint\limits_{D_{xy}}\rho^2\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\sqrt{1+4\rho^2}\mathrm{d}\rho$$

$$\xlongequal{\rho=\frac{1}{2}\tan t} 2\pi\cdot\frac{1}{16}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\sec^3 t\cdot\tan^3 t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi}{8}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\sec^2 t(\sec^2 t-1)\mathrm{d}\sec t = \frac{\pi}{8}\cdot\frac{596}{15} = \frac{149}{30}\pi.$$

(3) $\iint\limits_{\Sigma}3z\mathrm{d}S = 3\iint\limits_{D_{xy}}[2-(x^2+y^2)]\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\xlongequal{\text{极坐标}} 3\iint\limits_{D_{xy}}(2-\rho^2)\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2-\rho^2)\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho$$

$$\xlongequal{\rho=\frac{1}{2}\tan t} 6\pi\left[\frac{1}{2}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\sec^3 t\cdot\tan t\mathrm{d}t - \frac{1}{16}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\sec^3 t\cdot\tan^3 t\mathrm{d}t\right]$$

$$= 6\pi\left[\frac{1}{2}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\sec^2 t\mathrm{d}\sec t - \frac{1}{16}\int_0^{\arctan 2\sqrt{2}}\sec^2 t(\sec^2 t-1)\mathrm{d}\sec t\right]$$

$$= 6\pi\left(\frac{13}{3}-\frac{149}{60}\right) = \frac{111}{10}\pi.$$

5. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$，其中 Σ 是：

(1) 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围成的区域的整个边界曲面；

(2) 锥面 $z^2=3(x^2+y^2)$ 被平面 $z=0$ 和 $z=3$ 所截得的部分.

解 (1) Σ 由 Σ_1 和 Σ_2 组成，其中 Σ_1 为平面 $z=1$ 上被圆周 $x^2+y^2=1$ 所围的部分；Σ_2 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$.

在 Σ_1 上，$\mathrm{d}S=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

在 Σ_2 上，$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Σ_1 和 Σ_2 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 均为 $x^2+y^2\leqslant 1$.

因此
$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$$
$$=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\xlongequal{\text{极坐标}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho+\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho$$
$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi.$$

(2) 由题设,Σ 的方程为 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$,
$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\sqrt{1+\frac{9x^2}{3(x^2+y^2)}+\frac{9y^2}{3(x^2+y^2)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

又由 $z^2=3(x^2+y^2)$和 $z=3$ 消去 z 得 $x^2+y^2=3$,故 Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy}为 $x^2+y^2\leqslant 3$. 于是
$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{极坐标}}2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho=9\pi.$$

6. 计算下列对面积的曲面积分:

(1) $\iint\limits_{\Sigma}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)\mathrm{d}S$,其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限中的部分;

(2) $\iint\limits_{\Sigma}(2xy-2x^2-x+z)\mathrm{d}S$, 其中 Σ 为平面 $2x+2y+z=6$ 在第一卦限中的部分;

(3) $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$,其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上 $z\geqslant h(0<h<a)$ 的部分;

(4) $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$,其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截得的有限部分.

解 (1) 在 Σ 上,$z=4-2x-\frac{4}{3}y$. Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为由 x 轴、y 轴和直线$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 所围成的三角形闭区域. 因此
$$\iint_{\Sigma}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left[\left(4-2x-\frac{4}{3}y\right)+2x+\frac{4}{3}y\right]\sqrt{1+(-2)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}4\cdot\frac{\sqrt{61}}{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4\sqrt{61}}{3}\cdot(D_{xy}\text{ 的面积})$$

$$=\frac{4\sqrt{61}}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\right)=4\sqrt{61}.$$

(2) 在 Σ 上，$z=6-2x-2y$. Σ 在 xOy 面上的投影区域为由 x 轴、y 轴和直线 $x+y=3$ 所围成的三角形闭区域. 因此

$$\iint_{\Sigma}(2xy-2x^2-x+z)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_{xy}}[2xy-2x^2-x+(6-2x-2y)]\sqrt{1+(-2)^2+(-2)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^3\mathrm{d}x\int_0^{3-x}(6-3x-2x^2+2xy-2y)\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^3[(6-3x-2x^2)(3-x)+x(3-x)^2-(3-x)^2]\mathrm{d}x$$

$$=3\int_0^3(3x^3-10x^2+9)\mathrm{d}x=-\frac{27}{4}.$$

(3) 在 Σ 上，$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant a^2-h^2\}$.

由于积分曲面 Σ 关于 yOz 面和 xOz 面均对称，故有

$$\iint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}S=0,\iint_{\Sigma}y\,\mathrm{d}S=0.$$

于是 $$\iint_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}z\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=a\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a\pi(a^2-h^2).$$

(4) Σ 如图 11－9 所示，Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为圆域 $x^2+y^2\leqslant 2ax$. 由于 Σ 关于 xOz 面对称，而函数 xy 和 yz 关于 y 均为奇函数，故

$$\iint_{\Sigma}xy\,\mathrm{d}S=0,\iint_{\Sigma}yz\,\mathrm{d}S=0.$$

于是

$$\iint_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}zx\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_{xy}}x\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}x\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho\cos\theta\cdot\rho\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=8\sqrt{2}a^4\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.$$

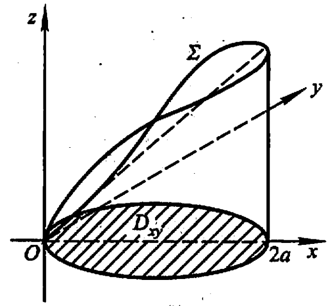


图 11-9

7. 求抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的质量,此壳的面密度为 $\mu=z$.

解 $\Sigma:z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(0\leqslant z\leqslant 1)$ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$. $z_x=x,z_y=y$. 故 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 因此

$$M=\iint_{\Sigma}z\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\rho^2\sqrt{1+\rho^2}\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\sqrt{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho$$

$$\xlongequal{t=\rho^2}\frac{\pi}{2}\int_0^2 t\sqrt{1+t}\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{\text{分部法}}\frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{3}t(1+t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2-\frac{2}{3}\int_0^2(1+t)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{4}{3}\cdot 3^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{15}(3^{\frac{5}{2}}-1)\right]=\frac{2\pi}{15}(6\sqrt{3}+1).$$

8. 求面密度为 μ_0 的均匀半球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$ 对于 z 轴的转动惯量.

解 $$I_z=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mu_0\mathrm{d}S$$

$$=\mu_0\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \mu_0 \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant a^2} (x^2+y^2) \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}} \mu_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a \frac{a\rho^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}} \cdot \rho \mathrm{d}\rho$$

$$\xlongequal{\rho = a\sin t} 2\pi a\mu_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^3 \sin^3 t}{a\cos t} \cdot a\cos t \mathrm{d}t$$

$$= 2\pi a^4 \mu_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \mathrm{d}t = 2\pi a^4 \mu_0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\pi a^4 \mu_0.$$

习题 11-5 对坐标的曲面积分

1. 按对坐标的曲面积分的定义证明公式

$$\iint\limits_{\Sigma} [P_1(x,y,z) \pm P_2(x,y,z)] \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} P_1(x,y,z) \mathrm{d}y\mathrm{d}z \pm \iint\limits_{\Sigma} P_2(x,y,z) \mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

证 把 Σ 任意分成 n 块小曲面 ΔS_i（其面积也记为 ΔS_i），ΔS_i 在 yOz 面上的投影为 $(\Delta S_i)_{yz}$，在 ΔS_i 上任意取定一点 (ξ_i, η_i, ζ_i). 设 λ 是各小块曲面的直径的最大值，则

$$\iint\limits_{\Sigma} [P_1(x,y,z) \pm P_2(x,y,z)] \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [P_1(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \pm P_2(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)] (\Delta S_i)_{yz}$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P_1(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz} \pm \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P_2(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz}$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} P_1(x,y,z) \mathrm{d}y\mathrm{d}z \pm \iint\limits_{\Sigma} P_2(x,y,z) \mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

2. 当 Σ 为 xOy 面内的一个闭区域时，曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与二重积分有什么关系？

解 此时 Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 就是 Σ 自身（但不定侧），且在 Σ 上，$z=0$，因此

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,0) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

当 Σ 取上侧时为正号，取下侧时为负号.

3. 计算下列对坐标的曲面积分：

(1) $\iint\limits_{\Sigma} x^2y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的下半部分的下侧；

(2) $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截得的在第一卦限内的部分的前侧；

(3) $\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，Σ 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧；

(4) $\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 Σ 是平面 $x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

解 (1) Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$，在 Σ 上，$z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. 因 Σ 取下侧，故

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}} x^2y^2(-\sqrt{R^2-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}\iint\limits_{D_{xy}}\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2 2\theta\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^R\rho^5\sqrt{R^2-\rho^2}\mathrm{d}\rho$$

$$\xlongequal{\rho=R\sin t}\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^5\sin^5 t\cdot R\cos t\cdot R\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{4}R^7\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5 t-\sin^7 t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{4}R^7\cdot\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}-\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{105}\pi R^7.$$

(2) 由于柱面 $x^2+y^2=1$ 在 xOy 面上的投影为零，因此 $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 又，$D_{yz}=\{(y,z)\mid 0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 3\}$，$D_{zx}=\{(x,z)\mid 0\leqslant z\leqslant 3,0\leqslant x\leqslant 1\}$（图11－10），因 Σ 取前侧，所以

$$\text{原式}=\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{D_{zx}}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^3 dz \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy + \int_0^3 dz \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= 2 \cdot 3\left[\frac{y}{2}\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2}\arcsin y\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{2}\pi.$$

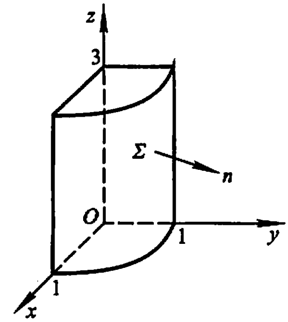


图 11−10

(3) 在 Σ 上，$z = 1 - x + y$. 由于 Σ 取上侧，故 Σ 在任一点处的单位法向量为

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x, -z_y, 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1).$$

由两类曲面积分之间的联系，可得

$$\text{原式} = \iint_\Sigma [(f+x)\cos\alpha + (2f+y)\cos\beta + (f+z)\cos\gamma]\,dS$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma [(f+x) - (2f+y) + (f+z)]\,dS$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma (x-y+z)\,dS = \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma dS$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\Sigma\text{ 的面积}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}.$$

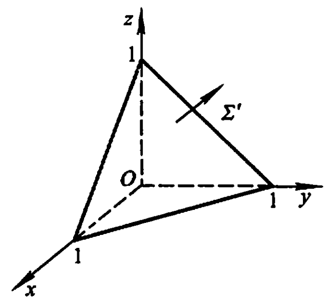


图 11−11

(4) 在坐标面 $x=0$、$y=0$ 和 $z=0$ 上，积分值均为零，因此只需计算在 Σ' : $x+y+z=1$ (取上侧) 上的积分值(图 11−11). 下面用两种方法计算.

方法一 $\displaystyle\iint_{\Sigma'} xz\,dx\,dy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-y)\,dx\,dy$

$$= \int_0^1 x\,dx \int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy = \frac{1}{24},$$

由被积函数和积分曲面关于积分变量的对称性，可得

$$\iint_{\Sigma'} xy\,dy\,dz = \iint_{\Sigma'} yz\,dz\,dx = \iint_{\Sigma'} xz\,dx\,dy = \frac{1}{24},$$

因此 $$\oiint_\Sigma xz\,dx\,dy + xy\,dy\,dz + yz\,dz\,dx = 3 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{8}.$$

方法二 利用两类曲面积分的联系，将 $\displaystyle\iint_{\Sigma'} xy\,dy\,dz$ 和 $\displaystyle\iint_{\Sigma'} yz\,dz\,dx$ 均化为关于坐标 x 和 y 的曲面积分计算.

由于 Σ': $x+y+z=1$ 取上侧，故 Σ' 在任一点处的单位法向量

$$n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

于是 $$\iint_{\Sigma}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}xy\cos\alpha\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}xy\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint_{\Sigma}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{\Sigma}yz\cos\beta\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}yz\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因此 $$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x\\&=\iint_{\Sigma}(xz+xy+yz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{D_{xy}}[x(1-x-y)+xy+y(1-x-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(-x^2-y^2-xy+x+y)\mathrm{d}y=\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

于是原式$=\frac{1}{8}$.

注 计算本题最方便的方法是利用下节的高斯公式：

$$\begin{aligned}&\oiint_{\Sigma}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iiint_{\Omega}(y+z+x)\mathrm{d}v\\&\xlongequal{\text{对称性}}3\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}v=3\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}z\mathrm{d}z\\&=3\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{(1-x-y)^2}{2}\mathrm{d}y\\&=3\int_0^1\frac{(1-x)^3}{6}\mathrm{d}x=3\cdot\frac{1}{24}=\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

4. 把对坐标的曲面积分

$$\iint_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

化成对面积的曲面积分，其中：

(1) Σ 是平面 $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 在第一卦限的部分的上侧；

(2) Σ 是抛物面 $z=8-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方的部分的上侧.

解 (1) 由于 Σ: $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 取上侧，故 Σ 在任一点处的单位法向量为

$$\begin{aligned}n&=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{3^2+2^2+(2\sqrt{3})^2}}(3,2,2\sqrt{3})\\&=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{2\sqrt{3}}{5}\right),\end{aligned}$$

于是 $\iint\limits_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS$

$$= \iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{3}{5}P + \frac{2}{5}Q + \frac{2\sqrt{3}}{5}R\right)dS.$$

(2) 由于 Σ: $z = 8-(x^2+y^2)$ 取上侧，故 Σ 在其上任一点 (x,y,z) 处的单位法向量为

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x, -z_y, 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}}(2x, 2y, 1),$$

于是 $\iint\limits_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS$

$$= \iint\limits_{\Sigma}\frac{2xP + 2yQ + R}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\,dS.$$

习题11-6 高斯公式 *通量与散度

1. 利用高斯公式计算曲面积分：

(1) $\oiint\limits_{\Sigma} x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy$，其中 Σ 为平面 $x=0, y=0, z=0, x=a, y=a, z=a$ 所围成的立体的表面的外侧；

*(2) $\oiint\limits_{\Sigma} x^3\,dydz + y^3\,dzdx + z^3\,dxdy$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧；

*(3) $\oiint\limits_{\Sigma} xz^2\,dydz + (x^2y - z^3)\,dzdx + (2xy + y^2z)\,dxdy$，其中 Σ 为上半球体 $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $x^2+y^2 \leqslant a^2$ 的表面外侧；

(4) $\oiint\limits_{\Sigma} x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$，其中 Σ 是界于 $z=0$ 和 $z=3$ 之间的圆柱体 $x^2+y^2 \leqslant 9$ 的整个表面的外侧；

(5) $\oiint\limits_{\Sigma} 4xz\,dydz - y^2\,dzdx + yz\,dxdy$，其中 Σ 是平面 $x=0, y=0, z=0, x=1, y=1, z=1$ 所围成的立方体的全表面的外侧.

解 (1)
$$\text{原式}=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$
$$=2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v$$
$$\xlongequal{\text{对称性}}6\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=6\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^a z\mathrm{d}z$$
$$=6\cdot a\cdot a\cdot\frac{a^2}{2}=3a^4.$$

(2)
$$\text{原式}=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$
$$=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$$
$$\xlongequal{\text{球面坐标}}3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$
$$=3\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{a^5}{5}=\frac{12}{5}\pi a^5.$$

(3)
$$\text{原式}=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}(z^2+x^2+y^2)\mathrm{d}v$$
$$\xlongequal{\text{球面坐标}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$
$$=2\pi\cdot 1\cdot\frac{a^5}{5}=\frac{2}{5}\pi a^5.$$

(4)
$$\text{原式}=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)\mathrm{d}v=3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v$$
$$=3\cdot\pi\cdot 3^2\cdot 3=81\pi.$$

(5)
$$\text{原式}=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}(4z-2y+y)\mathrm{d}v$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(4z-y)\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(2-y)\mathrm{d}y=\frac{3}{2}.$$

注 在计算上面的积分 $\iiint\limits_{\Omega}(4z-2y+y)\mathrm{d}v$ 时，如果利用被积函数和积分区域关于积分变量的对称性，可知 $\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}y\,\mathrm{d}v$，于是

$$\iiint\limits_{\Omega}(4z-2y+y)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}3z\mathrm{d}v=3\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 z\mathrm{d}z=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

从而可简化运算.

*2. 求下列向量 $\boldsymbol{A}$ 穿过曲面 Σ 流向指定侧的通量：

(1) $\boldsymbol{A}=yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 为圆柱 $x^2+y^2\leqslant a^2(0\leqslant z\leqslant h)$ 的全表面，流向外侧；

(2) $\boldsymbol{A}=(2x-z)\boldsymbol{i}+x^2y\boldsymbol{j}-xz^2\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 为立方体 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant a$，$0\leqslant z\leqslant a$ 的全表面，流向外侧；

(3) $\boldsymbol{A}=(2x+3z)\boldsymbol{i}-(xz+y)\boldsymbol{j}+(y^2+2z)\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 是以点 $(3,-1,2)$ 为球心，半径 $R=3$ 的球面，流向外侧.

解 (1) 通量
$$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial(yz)}{\partial x}+\frac{\partial(xz)}{\partial y}+\frac{\partial(xy)}{\partial z}\right]\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}0\mathrm{d}v=0.$$

(2) 通量
$$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\mathrm{d}v$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial(2x-z)}{\partial x}+\frac{\partial(x^2y)}{\partial y}+\frac{\partial(-xz^2)}{\partial z}\right]\mathrm{d}v$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}(2+x^2-2xz)\mathrm{d}v$$
$$=2a^3+\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^a(x^2-2xz)\mathrm{d}z$$
$$=2a^3-\frac{a^5}{6}=a^3\left(2-\frac{a^2}{6}\right).$$

(3) 通量
$$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\mathrm{d}v$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial(2x+3z)}{\partial x}+\frac{\partial(-xz-y)}{\partial y}+\frac{\partial(y^2+2z)}{\partial z}\right]\mathrm{d}v$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}(2-1+2)\mathrm{d}v=3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v$$

$$= 3 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 108\pi.$$

*3. 求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度：

(1) $\boldsymbol{A} = (x^2 + yz)\boldsymbol{i} + (y^2 + xz)\boldsymbol{j} + (z^2 + xy)\boldsymbol{k}$；

(2) $\boldsymbol{A} = \mathrm{e}^{xy}\boldsymbol{i} + \cos(xy)\boldsymbol{j} + \cos(xz^2)\boldsymbol{k}$；

(3) $\boldsymbol{A} = y^2\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$.

解 (1) $P = x^2 + yz, Q = y^2 + xz, R = z^2 + xy$，

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2x + 2y + 2z.$$

(2) $P = \mathrm{e}^{xy}, Q = \cos(xy), R = \cos(xz^2)$，

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = y\mathrm{e}^{xy} - x\sin(xy) - 2xz\sin(xz^2).$$

(3) $P = y^2, Q = xy, R = xz$，

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 + x + x = 2x.$$

4. 设 $u(x,y,z)$、$v(x,y,z)$是两个定义在闭区域 Ω 上的具有二阶连续偏导数的函数，$\frac{\partial u}{\partial n}$、$\frac{\partial v}{\partial n}$依次表示 $u(x,y,z)$、$v(x,y,z)$沿 Σ 的外法线方向的方向导数. 证明

$$\iiint_{\Omega}(u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S,$$

其中 Σ 是空间闭区域 Ω 的整个边界曲面. 这个公式叫做格林第二公式.

证 由教材本节例 3 证明的格林第一公式知：

$$\iiint_{\Omega}u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma}u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S - \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

在此公式中将函数 u 和 v 交换位置，得

$$\iiint_{\Omega}v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S - \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

将上面两个式子相减即得

$$\iiint_{\Omega}(u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S.$$

*5. 利用高斯公式推证阿基米德原理：浸没在液体中的物体所受液体的压力的合力(即浮力)的方向铅直向上、其大小等于这物体所排开的液体的重力.

证 取液面为 xOy 面，z 轴铅直向上. 设液体的密度为 ρ. 在物体表面 Σ 上取面积元素 $\mathrm{d}S$，$M(x,y,z)$为 $\mathrm{d}S$ 上的一点($z\leqslant 0$)，Σ 在点 M 处的外法线向量的方向余弦为 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$，则 $\mathrm{d}S$ 所受液体的压力在 x 轴、y 轴、z 轴上的分量

分别为

$$\rho z\cos\alpha \mathrm{d}S, \rho z\cos\beta \mathrm{d}S, \rho z\cos\gamma \mathrm{d}S.$$

Σ 所受的液体的总压力在各坐标轴上的分量等于上列各分量元素在 Σ 上的积分. 由高斯公式可算得

$$F_x = \oiint_{\Sigma} \rho z\cos\alpha \mathrm{d}S = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho z)}{\partial x}\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} 0\mathrm{d}v = 0;$$

$$F_y = \oiint_{\Sigma} \rho z\cos\beta \mathrm{d}S = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho z)}{\partial y}\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} 0\mathrm{d}v = 0;$$

$$F_z = \oiint_{\Sigma} \rho z\cos\gamma \mathrm{d}S = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho z)}{\partial z}\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} \rho\mathrm{d}v = \rho V,$$

(V 为 Ω 的体积), 故合力

$$\boldsymbol{F} = \rho V\boldsymbol{k},$$

此力的方向铅直向上, 大小等于被物体排开的液体的重力.

习题11-7 斯托克斯公式 *环流量与旋度

1. 试对曲面 $\Sigma: z = x^2+y^2, x^2+y^2 \leqslant 1, P = y^2, Q = x, R = z^2$ 验证斯托克斯公式.

解 按右手法则, Σ 取上侧, Σ 的边界 Γ 为圆周 $x^2+y^2=1, z=1$, 从 z 轴正向看去, 取逆时针方向.

$$\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma} (1-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} (1-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}} \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 (1-2\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho = \int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{2}{3}\rho^3\sin\theta\right]_0^1\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta = \pi;$$

Γ 的参数方程可取为 $x=\cos t, y=\sin t, z=1, t$ 从 0 变到 2π, 故

$$\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}(-\sin^3 t + \cos^2 t)\mathrm{d}t = \pi,$$

两者相等, 斯托克斯公式得到验证.

*2. 利用斯托克斯公式, 计算下列曲线积分:

(1) $\oint_{\Gamma} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$, 其中 Γ 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$, 若从 x 轴的正向看去, 这圆周是取逆时针方向;

(2) $\oint_\Gamma (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$,其中$\Gamma$为椭圆$x^2+y^2=a^2$,$\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1(a>0,b>0)$,若从$x$轴正向看去,这椭圆是取逆时针方向;

(3) $\oint_\Gamma 3y\mathrm{d}x-xz\mathrm{d}y+yz^2\mathrm{d}z$,其中$\Gamma$是圆周$x^2+y^2=2z,z=2$,若从$z$轴正向看去,这圆周是取逆时针方向;

(4) $\oint_\Gamma 2y\mathrm{d}x+3x\mathrm{d}y-z^2\mathrm{d}z$,其中$\Gamma$是圆周$x^2+y^2+z^2=9,z=0$,若从$z$轴正向看去,这圆周是取逆时针方向.

解 (1) 取Σ为平面$x+y+z=0$的上侧被Γ所围成的部分,则Σ的面积为πa^2,Σ的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(\text{图 } 11-12).$$

由斯托克斯公式,

$$\oint_\Gamma y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\iint_\Sigma\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}S=-\frac{3}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma\mathrm{d}S$$

$$=-\sqrt{3}\pi a^2.$$

(2) 如图 11-13,取Σ为平面$\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1$的上侧被$\Gamma$所围成的部分,$\Sigma$的单位法向量$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},0,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$. 由斯托克斯公式

$$\oint_\Gamma (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$$

$$=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y-z & z-x & x-y\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\iint_\Sigma\mathrm{d}S,(*)$$

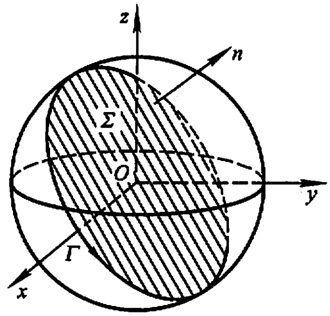


图 11－12

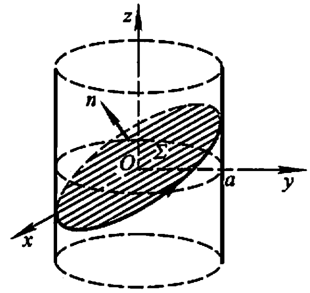


图 11－13

现用两种方法来求 $\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}S$.

方法一 由于 $\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}S = \Sigma$ 的面积 A，而 $A \cdot \cos\gamma = A \cdot \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \Sigma$ 在 xOy 面上的投影区域的面积 $= \pi a^2$，故

$$\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}S = \pi a^2 \Big/ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pi a\sqrt{a^2+b^2}.$$

方法二 用曲面积分计算法

由于在 Σ 上，$z = b - \dfrac{b}{a}x$，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S &= \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

又 $D_{xy} = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqslant a^2\}$，故

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}S &= \iint\limits_{D_{xy}} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \cdot \pi a^2\\ &= \pi a\sqrt{a^2+b^2}.\end{aligned}$$

将所求得的 $\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}S$ 代入（$*$）式，得

$$\text{原式} = \frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \pi a\sqrt{a^2+b^2} = -2\pi a(a+b).$$

(3) 取 Σ 为平面 $z=2$ 的上侧被 Γ 所围成的部分，则 Σ 的单位法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2+y^2 \leqslant 4$. 于是由斯托克斯公式，

$$\oint_{\Gamma} 3y\mathrm{d}x - xz\mathrm{d}y + yz^2\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

$$= -\iint_{\Sigma}(z+3)\mathrm{d}S = -\iint_{D_{xy}}(2+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -5\cdot\pi\cdot 2^2$$

$$= -20\pi.$$

(4) Γ 即为 xOy 面上的圆周 $x^2+y^2=9$，取 Σ 为圆域 $x^2+y^2\leqslant 9$ 的上侧，则由斯托克斯公式

$$\oint_{\Gamma} 2y\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}y - z^2\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3x & -z^2 \end{vmatrix}$$

$$= \iint_{\Sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 9\pi.$$

*3. 求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度：

(1) $\boldsymbol{A} = (2z-3y)\boldsymbol{i} + (3x-z)\boldsymbol{j} + (y-2x)\boldsymbol{k}$；

(2) $\boldsymbol{A} = (z+\sin y)\boldsymbol{i} - (z - x\cos y)\boldsymbol{j}$；

(3) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}x^2\sin y + \boldsymbol{j}y^2\sin(xz) + \boldsymbol{k}xy\sin(\cos z)$.

解 (1) $$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2z-3y & 3x-z & y-2x \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}.$$

(2) $$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z+\sin y & -(z-x\cos y) & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + (\cos y - \cos y)\boldsymbol{k}$$

$$= \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}.$$

(3) $$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2\sin y & y^2\sin(xz) & xy\sin(\cos z) \end{vmatrix}$$

$$= [x\sin(\cos z) - xy^2\cos(xz)]\boldsymbol{i} - y\sin(\cos z)\boldsymbol{j}$$

$$+ [y^2z\cos(xz) - x^2\cos y]\boldsymbol{k}.$$

*4. 利用斯托克斯公式把曲面积分 $\iint_{\Sigma}\mathbf{rot}\,\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$ 化为曲线积分，并计算积分

值，其中 A、Σ 及 $\boldsymbol{n}$ 分别如下：

(1) $\boldsymbol{A}=y^2\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧，$\boldsymbol{n}$ 是 Σ 的单位法向量；

(2) $\boldsymbol{A}=(y-z)\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}-xz\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 为立方体 $\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2,0\leqslant z\leqslant 2\}$ 的表面外侧去掉 xOy 面上的那个底面，$\boldsymbol{n}$ 是 Σ 的单位法向量.

解 (1) Σ 的正向边界曲线 Γ 为 xOy 面上的圆周 $x^2+y^2=1$，从 z 轴正向看去 Γ 取逆时针向，Γ 的参数方程为 $x=\cos t, y=\sin t, z=0$，t 从 0 变到 2π.

由斯托克斯公式，

$$\iint_{\Sigma}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$=\oint_{\Gamma}y^2\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}[\sin^2 t\cdot(-\sin t)+\cos t\cdot\sin t\cdot\cos t]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}(1-2\cos^2 t)\mathrm{d}\cos t=0.$$

(2) Σ 的边界曲线 Γ 为 xOy 面上由直线 $x=0,y=0,x=2,y=2$ 所围成的正方形的边界，从 z 轴 正向看去取逆时针向. 由斯托克斯公式，

$$\iint_{\Sigma}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$=\oint_{\Gamma}(y-z)\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}y-xz\mathrm{d}z\quad（代入\ z=0）$$

$$=\oint_{\Gamma}y\mathrm{d}x=\int_2^0 2\mathrm{d}x=-4.$$

*5. 求下列向量场 $\boldsymbol{A}$ 沿闭曲线 Γ（从 z 轴正向看 Γ 依逆时针方向）的环流量：

(1) $\boldsymbol{A}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$（$c$ 为常量），Γ 为圆周 $x^2+y^2=1, z=0$；

(2) $\boldsymbol{A}=(x-z)\boldsymbol{i}+(x^3+yz)\boldsymbol{j}-3xy^2\boldsymbol{k}$，其中 Γ 为圆周 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}, z=0$.

解 (1) Γ 的参数方程为 $x=\cos t, y=\sin t, z=0$，t 从 0 变到 2π，于是所求环流量为

$$\oint_{\Gamma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$=\oint_{\Gamma}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+c\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}[(-\sin t)(-\sin t)+\cos t(\cos t)]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi.$$

(2) Γ是 xOy 面上的圆周 $x^2+y^2=4$（从 z 轴正向看 Γ 依逆时针方向），它的参数方程为 $x=2\cos t, y=2\sin t, z=0, t$ 从 0 变到 2π. 于是所求的环流量为

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s &= \oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z \\
&= \oint_\Gamma (x-z)\mathrm{d}x+(x^3+yz)\mathrm{d}y-3xy^2\mathrm{d}z \quad (\text{代入 } z=0) \\
&= \oint_\Gamma x\mathrm{d}x+x^3\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi}[2\cos t\cdot(-2\sin t)+8\cos^3 t\cdot 2\cos t]\mathrm{d}t \\
&= -4\int_0^{2\pi}\sin t\cos t\mathrm{d}t+16\int_0^{2\pi}\cos^4 t\mathrm{d}t \\
&= 0+64\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\mathrm{d}t^{①} \\
&= 64\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=12\pi.
\end{aligned}$$

注① $$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos^4 t\mathrm{d}t &\xlongequal{\text{周期性}} 2\int_0^{\pi}\cos^4 t\mathrm{d}t \\ &= 2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^4 t\mathrm{d}t\right],\end{aligned}$$

由于 $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^4 t\mathrm{d}t \xlongequal{u=\pi-t} -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^4 u\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 u\mathrm{d}u,$$

故得 $$\int_0^{2\pi}\cos^4 t\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\mathrm{d}t.$$

*6. 证明 $\mathbf{rot}\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathbf{rot}\,\boldsymbol{a}+\mathbf{rot}\,\boldsymbol{b}$.

证 设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，其中 $a_x,a_y,a_z;b_x,b_y,b_z$ 均为 x,y,z 的函数，则

$$\begin{aligned}
\mathbf{rot}\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= \mathbf{rot}\,((a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}) \\
&= \left[\frac{\partial(a_z+b_z)}{\partial y}-\frac{\partial(a_y+b_y)}{\partial z}\right]\boldsymbol{i}+\left[\frac{\partial(a_x+b_x)}{\partial z}-\frac{\partial(a_z+b_z)}{\partial x}\right]\boldsymbol{j} \\
&\quad +\left[\frac{\partial(a_y+b_y)}{\partial x}-\frac{\partial(a_x+b_x)}{\partial y}\right]\boldsymbol{k} \\
&= \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right] \\
&\quad +\left[\left(\frac{\partial b_z}{\partial y}-\frac{\partial b_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial b_x}{\partial z}-\frac{\partial b_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial b_y}{\partial x}-\frac{\partial b_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right] \\
&= \mathbf{rot}\,\boldsymbol{a}+\mathbf{rot}\,\boldsymbol{b}.
\end{aligned}$$

*7. 设 $u=u(x,y,z)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\mathbf{rot}\,(\mathbf{grad}\,u)$.

解 $\mathbf{grad}\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$,

$$\mathbf{rot}\,(\mathbf{grad}\,u)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\boldsymbol{j}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\boldsymbol{k}\text{（由于各二阶偏导数连续）}$$

$$=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}=\mathbf{0}.$$

总习题十一

1. 填空

(1) 第二类曲线积分 $\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 化成第一类曲线积分是________，其中 α、β、γ 为有向曲线弧 Γ 在点 (x,y,z) 处的________ 的方向角；

(2) 第二类曲面积分 $\iint\limits_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化成第一类曲面积分是________，其中 α、β、γ 为有向曲面 Σ 在点 (x,y,z) 处的________ 的方向角.

解 (1) 由教材本章第二节的公式(3)，可知第一个空格应填：$\int_\Gamma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$；第二个空格应填：切向量.

(2) 由教材本章第五节的公式(9)，可知第一个空格应填：$\iint\limits_\Sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$；第二个空格应填：法向量.

2. 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论：

设曲面 Σ 是上半球面：$x^2+y^2+z^2=R^2(z\geqslant 0)$，曲面 Σ_1 是曲面 Σ 在第一卦限中的部分，则有________.

(A) $\iint\limits_\Sigma x\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$.　　(B) $\iint\limits_\Sigma y\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$.

(C) $\iint\limits_\Sigma z\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$.　　(D) $\iint\limits_\Sigma xyz\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}xyz\mathrm{d}S$.

解 应选(C). 先说明(A)不对. 由于 Σ 关于 yOz 面对称，被积函数 x 关于 x 是

奇函数，所以$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S=0$. 但在$\Sigma_1$上，被积函数$x$连续且大于零，所以$\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S>0$. 因此$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S\neq 4\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$. 类似可说明(B)和(D)不对. 再说明(C)正确. 由于Σ关于yOz面和zOx面均对称，被积函数z关于x和y均为偶函数，故$\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1} z\mathrm{d}S$；而在$\Sigma_1$上，字母$x$、$y$、$z$是对称的. 故$\iint\limits_{\Sigma_1} z\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$，因此有$\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$.

3. 计算下列曲线积分：

(1) $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$，其中$L$为圆周$x^2+y^2=ax$；

(2) $\int_\Gamma z\,\mathrm{d}s$，其中$\Gamma$为曲线$x=t\cos t, y=t\sin t, z=t\,(0\leqslant t\leqslant t_0)$；

(3) $\int_L (2a-y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$，其中$L$为摆线$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$上对应$t$从0到$2\pi$的一段弧；

(4) $\int_\Gamma (y^2-z^2)\mathrm{d}x+2yz\mathrm{d}y-x^2\mathrm{d}z$，其中$\Gamma$是曲线$x=t, y=t^2, z=t^3$上由$t_1=0$到$t_2=1$的一段弧；

(5) $\int_\Gamma (\mathrm{e}^x\sin y-2y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-2)\mathrm{d}y$，其中$L$为上半圆周$(x-a)^2+y^2=a^2, y\geqslant 0$，沿逆时针方向；

(6) $\oint_\Gamma xyz\mathrm{d}z$，其中$\Gamma$是用平面$y=z$截球面$x^2+y^2+z^2=1$所得的截痕，从$z$轴的正向看去，沿逆时针方向.

解 (1) **解法一** L的方程即为$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$，故可取$L$的参数方程为$x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t, y=\frac{a}{2}\sin t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$. 于是

$$\begin{aligned}\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s&=\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{2}a}{2}\sqrt{1+\cos t}\cdot\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\sin t\right)^2+\left(\frac{a}{2}\cos t\right)^2}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{\sqrt{2}a^2}{4}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos t}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2}a^2}{4}\cdot\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t\\&=2a^2\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}\,\mathrm{d}\frac{t}{2}=2a^2.\end{aligned}$$

解法二 L的极坐标方程为$\rho=a\cos\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,\mathrm{d}\theta=a\mathrm{d}\theta,$$

因此 $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta \cdot a\mathrm{d}\theta = 2a^2.$

(2) $$\int_\Gamma z\mathrm{d}s = \int_0^{t_0} t\sqrt{(\cos t - t\sin t)^2+(\sin t + t\cos t)^2+1}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{t_0} t\sqrt{2+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{t_0}\sqrt{2+t^2}\mathrm{d}(2+t^2)$$

$$= \frac{1}{3}(2+t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{t_0} = \frac{1}{3}\left[(2+t_0^2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}\right].$$

(3) $$\int_L (2a-y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[(2a-a+a\cos t)\cdot a(1-\cos t) + a(t-\sin t)\cdot a\sin t\right]\mathrm{d}t$$

$$= a^2\int_0^{2\pi} t\sin t\mathrm{d}t = a^2\left[-t\cos t\right]_0^{2\pi} + a^2\int_0^{2\pi}\cos t\mathrm{d}t$$

$$= -2\pi a^2 + 0 = -2\pi a^2.$$

(4) $$\int_\Gamma (y^2-z^2)\mathrm{d}x + 2yz\mathrm{d}y - x^2\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1\left[(t^4-t^6)\cdot 1 + 2t^2\cdot t^3\cdot 2t - t^2\cdot 3t^2\right]\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 (3t^6 - 2t^4)\mathrm{d}t = \frac{1}{35}.$$

(5) 如图 11-14，添加有向线段 OA：$y=0$，x 从 0 变到 $2a$，则在由 L 与 OA 所围成的闭区域 D 上应用格林公式可得

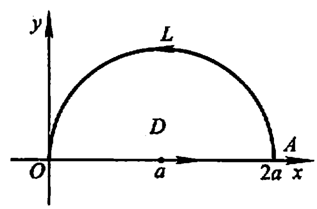


图 11-14

$$\int_{L+OA} (\mathrm{e}^x\sin y - 2y)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y - 2)\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D (\mathrm{e}^x\cos y - \mathrm{e}^x\cos y + 2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi a^2,$$

于是 $$\int_L (\mathrm{e}^x\sin y - 2y)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y - 2)\mathrm{d}y$$

$$= \pi a^2 - \int_{OA} (\mathrm{e}^x\sin y - 2y)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y - 2)\mathrm{d}y$$

$$= \pi a^2 - \int_0^{2a} (\mathrm{e}^x\sin 0 - 2\cdot 0)\mathrm{d}x = \pi a^2.$$

注 本题通过添加辅助路径并利用格林公式，将难以直接计算的曲线积分

化为一个易于计算的二重积分和另一个易于计算的曲线积分之差，从而方便地求得结果. 这是格林公式的用处之一，值得注意.

(6) 由 Γ 的一般方程 $\begin{cases} y = z, \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$ 可得 $x^2+2y^2=1$.

从而可令 $x=\cos t, y=\dfrac{\sin t}{\sqrt{2}}, z=\dfrac{\sin t}{\sqrt{2}}$，$t$ 从 0 变到 2π. 于是

$$\begin{aligned}
\oint_{\Gamma} xyz\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \cos t\left(\frac{\sin t}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{8\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{8\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4t}{2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{16}.
\end{aligned}$$

4. 计算下列曲面积分：

(1) $\iint\limits_{\Sigma} \dfrac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 是介于平面 $z=0$ 及 $z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$；

(2) $\iint\limits_{\Sigma} (y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\leqslant z\leqslant h)$ 的外侧；

(3) $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧；

(4) $\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1\,(x\geqslant 0, y\geqslant 0)$ 的外侧.

解 (1) 将 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2 两片，Σ_1 为 $y=\sqrt{R^2-x^2}$，Σ_2 为 $y=-\sqrt{R^2-x^2}$，Σ_1 和 Σ_2 在 zOx 面上的投影区域均为

$$D_{zx} = \{(x,z)\mid 0\leqslant z\leqslant H, -R\leqslant x\leqslant R\}.$$

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\Sigma_1} \frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2} &= \iint\limits_{D_{zx}} \frac{1}{R^2+z^2}\sqrt{1+\frac{(-x)^2}{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z \\
&= \int_0^H \frac{1}{R^2+z^2}\mathrm{d}z \cdot \int_{-R}^{R} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{R}\arctan\frac{z}{R}\right]_0^H \cdot \left[R\arcsin\frac{x}{R}\right]_{-R}^{R} \\
&= \pi\arctan\frac{H}{R}.
\end{aligned}$$

又由于被积函数关于 y 是偶函数，积分曲面 Σ_1 和 Σ_2 关于 zOx 面对称，故

$$\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}=\pi\arctan\frac{H}{R}.$$

由此得

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}=2\pi\arctan\frac{H}{R}.$$

(2) 添加辅助曲面 $\Sigma_1=\{(x,y,z)\mid z=h,x^2+y^2\leqslant h^2\}$，取上侧，则在由 Σ 和 Σ_1 所包围的空间闭区域 Ω 上应用高斯公式得

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial(y^2-z)}{\partial x}+\frac{\partial(z^2-x)}{\partial y}+\frac{\partial(x^2-y)}{\partial z}\right]\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}0\cdot\mathrm{d}v=0,\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\text{原式}&=-\iint\limits_{\Sigma_1}(y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中

$$D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant h^2\}.$$

在计算 $\iint\limits_{D_{xy}}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 时，由对称性易知 $\iint\limits_{D_{xy}}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，又 $\iint\limits_{D_{xy}}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，故

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\xlongequal{\text{极坐标}}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{4}h^4.\end{aligned}$$

从而得

$$\text{原式}=-\frac{\pi}{4}h^4.$$

注 本题若用第二类曲面积分的计算公式直接计算，则运算将十分繁复. 现在通过添加辅助曲面并利用高斯公式，就将原积分化为辅助曲面上的一个容易计算的曲面积分，从而达到了化繁为简、化难为易的目的. 这种做法与前面第 3 (5) 题利用格林公式化简曲线积分计算的做法是类似的，请读者注意比较，并思考这样的问题：要使这种做法可行，所给的曲线积分（曲面积分）应具备什么条件？

(3) 添加辅助曲面 $\Sigma_1=\{(x,y,z)\mid z=0,x^2+y^2\leqslant R^2\}$，取下侧，则在由 Σ 和 Σ_1 所围成的空间闭区域 Ω 上应用高斯公式得

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$

$$= 3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v = 3\cdot\frac{2\pi R^3}{3} = 2\pi R^3,$$

于是

$$原式 = 2\pi R^3 - \iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\pi R^3 - 0 = 2\pi R^3.$$

(4) **解法一** 将 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2 两片,其中 Σ_1 : $z=\sqrt{1-x^2-y^2}\,(x\geqslant 0, y\geqslant 0)$,取上侧; Σ_2 : $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}\,(x\geqslant 0, y\geqslant 0)$,取下侧. Σ_1 和 Σ_2 在 xOy 面上的投影区域均为 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$ (图11-15). 于是

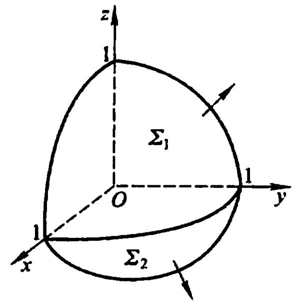


图 11-15

$$\iint\limits_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{极坐标} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^1\rho^2\sqrt{1-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$\xlongequal{\rho=\sin t} \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cdot\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 t - \sin^5 t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{15};$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{15},$$

因而

$$\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{15}+\frac{1}{15} = \frac{2}{15}.$$

解法二 应用高斯公式计算.

添加辅助曲面 Σ_3: $x=0$ (取后侧); Σ_4: $y=0$ (取左侧),则有

$$\iint\limits_{\Sigma_3} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma_4} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

在由 Σ、Σ_3 和 Σ_4 所围成的空间闭区域 Ω 上应用高斯公式,得

$$\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma+\Sigma_3+\Sigma_4} xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(xyz)}{\partial z}\mathrm{d}v$$
$$= \iiint_{\Omega} xy\,\mathrm{d}v = \iint_{D_{xy}} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathrm{d}z$$
$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2}{15}.$$

5. 证明：$\dfrac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 在整个 xOy 平面除去 y 的负半轴及原点的区域 G 内是某个二元函数的全微分，并求出一个这样的二元函数.

证　G 为平面单连通域，在 G 内 $P=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$Q=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ 具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故 $\dfrac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 在 G 内是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分.

取折线积分路径 $(0,1)\to(x,1)\to(x,y)$（图 11−16），则

$$u(x,y) = \int_0^x \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+1} + \int_1^y \frac{y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$
$$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+y^2)\right]_1^y$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2).$$

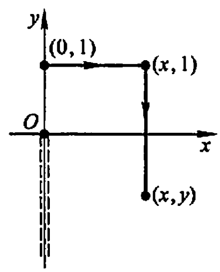


图 11−16

6. 设在半平面 $x>0$ 内有力 $\boldsymbol{F} = -\dfrac{k}{\rho^3}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j})$ 构成力场，其中 k 为常数，$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. 证明在此力场中场力所作的功与所取的路径无关.

证　半平面 $x>0$ 是单连通域. 在此区域内，$P=-\dfrac{kx}{\rho^3}$、$Q=-\dfrac{ky}{\rho^3}$ 具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{3kxy}{\rho^5} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故在此区域内，场力 $\boldsymbol{F}$ 沿曲线 L 所作的功，即

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -k\int_L \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{\rho^3}$$

与路径无关.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，其起点为 (a,b)，终点为 (c,d). 记

$$I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2 f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2 f(xy)-1]\mathrm{d}y,$$

(1) 证明曲线积分 I 与路径无关;

(2) 当 $ab=cd$ 时,求 I 的值.

(1) **证** 因为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{y}[1+y^2 f(xy)]\right\}=f(xy)-\frac{1}{y^2}+xyf'(xy)$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{y^2}[y^2 f(xy)-1]\right\}$$

在上半平面这个单连通域内处处成立,所以在上半平面内曲线积分与路径 L 无关.

(2) **解** 由于 I 与路径无关,故可取积分路径 L 为由点 (a,b) 到点 (c,b) 再到点 (c,d) 的有向折线,从而得

$$\begin{aligned}I&=\int_a^c \frac{1}{b}[1+b^2 f(bx)]\mathrm{d}x+\int_b^d \frac{c}{y^2}[y^2 f(cy)-1]\mathrm{d}y\\&=\frac{c-a}{b}+\int_a^c bf(bx)\mathrm{d}x+\int_b^d cf(cy)\mathrm{d}y+\frac{c}{d}-\frac{c}{b}\\&=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{bc} f(t)\mathrm{d}t+\int_{bc}^{cd} f(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{cd} f(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

当 $ab=cd$ 时,$\int_{ab}^{cd} f(t)\mathrm{d}t=0$,由此得

$$I=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}.$$

8. 求均匀曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的质心的坐标.

解 设质心位置为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$. 由对称性可知质心位于 z 轴上,故 $\bar{x}=\bar{y}=0$.

Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}$.

由于

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma z\mathrm{d}S&=\iint_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=a\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a\cdot\pi a^2=\pi a^3,\end{aligned}$$

又 Σ 的面积 $A=2\pi a^2$,

故

$$\bar{z}=\frac{\iint_\Sigma z\mathrm{d}S}{A}=\frac{\pi a^3}{2\pi a^2}=\frac{a}{2},$$

所求的质心为 $\left(0,0,\frac{a}{2}\right)$.

9. 设 $u(x,y)$、$v(x,y)$ 在闭区域 D 上都具有二阶连续偏导数，分段光滑的曲线 L 为 D 的正向边界曲线. 证明：

(1) $\iint\limits_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_D(\mathbf{grad}\ u\cdot\mathbf{grad}\ v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_L v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$;

(2) $\iint\limits_D(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_L\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s$,

其中 $\frac{\partial u}{\partial n}$、$\frac{\partial v}{\partial n}$ 分别是 u、v 沿 L 的外法线向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数，符号 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 称二维拉普拉斯算子.

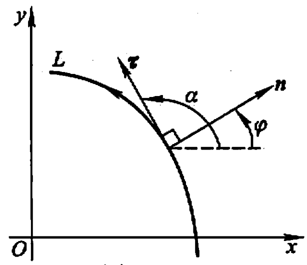


图 11-17

证 (1) 如图 11-17，$\boldsymbol{n}$ 为有向曲线 L 的外法线向量，$\boldsymbol{\tau}$ 为 L 的切线向量. 设 x 轴到 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 的转角分别为 φ 和 α，则 $\alpha=\varphi+\frac{\pi}{2}$，且 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦为 $\cos\varphi$，$\sin\varphi$；$\boldsymbol{\tau}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha$，$\sin\alpha$. 于是

$$\oint_L v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\oint_L v(u_x\cos\varphi+u_y\sin\varphi)\mathrm{d}s$$

$$=\oint_L v(u_x\sin\alpha-u_y\cos\alpha)\mathrm{d}s\ (\cos\alpha\mathrm{d}s=\mathrm{d}x,\sin\alpha\mathrm{d}s=\mathrm{d}y)$$

$$=\oint_L vu_x\mathrm{d}y-vu_y\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{格林公式}}\iint\limits_D\left[\frac{\partial(vu_x)}{\partial x}-\frac{\partial(-vu_y)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D[(u_xv_x+vu_{xx})+(u_yv_y+vu_{yy})]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D v(u_{xx}+u_{yy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D(u_xv_x+u_yv_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D(\mathbf{grad}\ u\cdot\mathbf{grad}\ v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

把上式右端第二个积分移到左端即得所要证明的等式.

(2) 在(1)证得的等式中交换 u、v 的位置，可得

$$\iint\limits_D u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_D(\mathbf{grad}\ v\cdot\mathbf{grad}\ u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_L u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s,$$

在此式的两端分别减去(1)中等式的两端，即得所需证明的等式.

*10. 求向量 $\boldsymbol{A}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 通过闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1,0\leqslant z\leqslant1\}$ 的边界曲面流向外侧的通量.

解　通量 $\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\xlongequal{\text{高斯公式}}\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)\mathrm{d}v=3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=3\cdot 1=3.$$

11. 求力 $\boldsymbol{F}=y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$ 沿有向闭曲线 Γ 所作的功，其中 Γ 为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界，从 z 轴正向看去，沿顺时针方向.

解　$W=\oint_{\Gamma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint_{\Gamma}y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z.$

下面用两种方法来计算上面这个积分.

方法一　化为定积分直接计算. 如图 11－18，Γ 由 AB、BC、CA 三条有向线段组成，

$AB: z=0, x=t, y=1-t, t$ 从 0 变到 1；

$BC: y=0, x=t, z=1-t, t$ 从 1 变到 0；

$CA: x=0, y=t, z=1-t, t$ 从 0 变到 1.

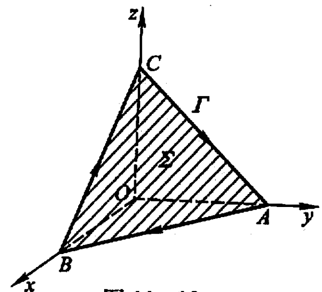


图 11－18

于是

$$\int_{AB}y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_{AB}y\mathrm{d}x=\int_0^1(1-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2};$$

$$\int_{BC}y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_{BC}x\mathrm{d}z=\int_1^0 t\cdot(-1)\mathrm{d}t=\frac{1}{2};$$

$$\int_{CA}y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_{CA}z\mathrm{d}y=\int_0^1(1-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.$$

因此　$$W=\oint_{\Gamma}y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CA}=\frac{3}{2}.$$

***方法二**　利用斯托克斯公式计算. 取 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 的下侧被 Γ 所围的部分，则 Σ 在任一点处的单位法向量为 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，由斯托克斯公式得

$$\oint_{\Gamma}y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}S=\sqrt{3}\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

$$=\sqrt{3}\cdot(\Sigma\text{ 的面积})=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}.$$

第十二章 无穷级数

习题12－1 常数项级数的概念和性质

1. 写出下列级数的前五项：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{5^n}$； (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

解 (1) $\frac{1+1}{1+1^2}+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\frac{1+4}{1+4^2}+\frac{1+5}{1+5^2}+\cdots$.

(2) $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\cdots$.

(3) $\frac{1}{5}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^5}-\cdots$.

(4) $\frac{1!}{1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\frac{5!}{5^5}+\cdots$.

2. 写出下列级数的一般项：

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$；

(2) $\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\frac{6}{5}-\cdots$；

(3) $\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{x}{2\cdot 4}+\frac{x\sqrt{x}}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^2}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots$；

(4) $\frac{a^2}{3}-\frac{a^3}{5}+\frac{a^4}{7}-\frac{a^5}{9}+\cdots$.

解 设 u_n 为级数的一般项，通过观察，不难看出：

(1) $u_n=\frac{1}{2n-1}$.

(2) $u_n=(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}$.

(3) $u_n=\frac{x^{\frac{n}{2}}}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}$.

(4) $u_n = (-1)^{n-1} \dfrac{a^{n+1}}{2n+1}$.

3. 根据级数收敛与发散的定义判定下列级数的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$;

(2) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots$;

(3) $\sin \dfrac{\pi}{6} + \sin \dfrac{2\pi}{6} + \cdots + \sin \dfrac{n\pi}{6} + \cdots$.

解 设级数的部分和为 s_n.

(1) 因为

$$s_n = (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$= \sqrt{n+1} - 1,$$
$$\lim_{n \to \infty} s_n = \infty,$$

所以根据定义可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 发散.

(2) 由于 $u_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$, 从而

$$s_n = \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2n+1}\right],$$
$$\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{1}{2},$$

所以根据定义可知级数收敛.

(3) 由于 $u_n = \sin \dfrac{n\pi}{6} = \dfrac{2\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{n\pi}{6}}{2\sin \frac{\pi}{12}} = \dfrac{\cos \frac{2n-1}{12}\pi - \cos \frac{2n+1}{12}\pi}{2\sin \frac{\pi}{12}}$,

从而

$$s_n = \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{12}}\left[\left(\cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{3\pi}{12}\right) + \left(\cos \frac{3\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12}\right) + \cdots + \left(\cos \frac{2n-1}{12}\pi - \cos \frac{2n+1}{12}\pi\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{12}}\left(\cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{2n+1}{12}\pi\right),$$

因为 当 $n\to\infty$时,$\cos\frac{2n+1}{12}\pi$ 的极限不存在,所以 s_n 的极限不存在,即级数发散.

4. 判定下列级数的收敛性:

(1) $-\frac{8}{9}+\frac{8^2}{9^2}-\frac{8^3}{9^3}+\cdots+(-1)^n\frac{8^n}{9^n}+\cdots$;

(2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3n}+\cdots$;

(3) $\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{3}}+\cdots$;

(4) $\frac{3}{2}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3^3}{2^3}+\cdots+\frac{3^n}{2^n}+\cdots$;

(5) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$.

解 (1) 此级数为公比 $q=-\frac{8}{9}$ 的等比级数,因 $|q|<1$,故该级数收敛.

(2) 此级数的部分和

$$s_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3n}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right),$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=+\infty$,故

$$\lim_{n\to\infty}s_n=+\infty,$$

即该级数发散.

(3) 此级数的一般项 $u_n=\frac{1}{\sqrt[n]{3}}$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n}}=1$,不满足级数收敛的必要条件,故该级数发散.

(4) 此级数为公比 $q=\frac{3}{2}$ 的等比级数,因 $|q|>1$,故该级数发散.

(5) 此级数的一般项 $u_n=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}$,注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 分别是公比$q=\frac{1}{2}$ 与 $q=\frac{1}{3}$ 的等比级数,而 $|q|<1$,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 均收敛. 根据收敛级数的性质可知,原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$ 收敛.

*5. 利用柯西审敛原理判定下列级数的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$;

(2) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$;

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}\right)$.

解 (1) $$\begin{aligned}|s_{n+p}-s_n| &= |u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\cdots+u_{n+p}|\\ &= \left|\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}+\frac{(-1)^{n+3}}{n+2}+\frac{(-1)^{n+4}}{n+3}+\cdots+\frac{(-1)^{n+p+1}}{n+p}\right|\\ &= \left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}\right|.\end{aligned}$$

由于 $$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}$$

$$=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)+\cdots+\begin{cases}\dfrac{1}{n+p}, & p\text{ 为奇数}\\ \dfrac{1}{n+p-1}-\dfrac{1}{n+p}, & p\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

故 $$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}>0,\ \forall p\in\mathbf{N}^*.$$

于是,当 p 为奇数时,

$$|s_{n+p}-s_n|=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)<\frac{1}{n+1};$$

当 p 为偶数时,

$$|s_{n+p}-s_n|=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p-1}\right)-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n+1}.$$

因此,对任意给定的正数 ε,取正整数 $N\geqslant\frac{1}{\varepsilon}$,则当 $n>N$ 时,对任何正整数 p,都有

$$|s_{n+p}-s_n|<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

根据柯西收敛原理知,级数收敛.

(2) 当 n 是 3 的倍数时,如果取 $p=3n$,则必有

$$\begin{aligned}|s_{n+p}-s_n| &= \left|\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\frac{1}{n+4}+\left(\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+6}\right)+\cdots+\frac{1}{4n-2}+\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right)\right|\\ &> \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{4n-2}>\underbrace{\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}+\cdots+\frac{1}{4n}}_{n\text{个}}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

于是对 $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$,不论 N 为何正整数,当 $n>N$ 并 n 是 3 的倍数,且当 $p=3n$ 时,就有

$$|s_{n+p}-s_n|>\varepsilon_0,$$

根据柯西收敛原理知，级数发散．

注 柯西收敛原理是这样叙述的：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件为“对任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，对任意的正整数 p，都有 $|s_{n+p}-s_n|<\varepsilon$.”

因此按柯西收敛原理，判别级数发散的充要条件就是对上述条件的否定，即“对某个正数 ε_0，不论 N 取什么正整数，至少有一个 $n(>N)$ 且至少有一个 $p\in\mathbf{N}^*$，使得 $|s_{n+p}-s_n|\geqslant\varepsilon_0$.”

(3)
$$
\begin{aligned}
|s_{n+p}-s_n| &= |u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}| \\
&= \left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}=\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}} \\
&< \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}
$$

由此可知，对任意给定的正数 ε，取正整数 $N\geqslant\log_2\frac{1}{\varepsilon}$，当 $n>N$ 时，对一切正整数 p，都有 $|s_{n+p}-s_n|<\varepsilon$．按柯西收敛原理，该级数收敛．

(4) 本题与(2) 类同，因 $u_n=\frac{1}{3n+1}+\left(\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}\right)>\frac{1}{3n+1}>\frac{1}{9n}$，对 $\varepsilon_0=\frac{1}{9}$，不论 n 取什么正整数，取 $p=n$ 时，就有 $|s_{n+p}-s_n|>\frac{1}{9}$．因此该级数发散．

习题 12-2 常数项级数的审敛法

1. 用比较审敛法或极限形式的比较审敛法判定下列级数的收敛性：

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)}+\cdots$；

(2) $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\cdots+\frac{1+n}{1+n^2}+\cdots$；

(3) $\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{3\cdot6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+\cdots$；

(4) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2^2}+\sin\frac{\pi}{2^3}+\cdots+\sin\frac{\pi}{2^n}+\cdots$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \quad (a>0)$.

解 (1) **方法一**：$u_n=\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}(n=1,2,\cdots)$，由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故各项乘以 $\frac{1}{2}$ 后的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 也发散，由比较审敛法知原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 发散．

方法二：因 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故由极限形式的比较审敛法知原级数发散．

(2) $u_n=\frac{1+n}{1+n^2}>\frac{1+n}{n+n^2}=\frac{1}{n}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，由比较审敛法知原级数发散．

(3) 因 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)(n+4)}}{\frac{1}{n^2}}=1$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，由极限形式的比较审敛法知原级数收敛．

(4) 因 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\pi\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}=\pi$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，故由极限形式的比较审敛法知原级数收敛．

(5) 当 $0<a\leqslant 1$ 时，$\frac{1}{1+a^n}\geqslant\frac{1}{2}$，一般项不趋于零，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 发散；当 $a>1$ 时，$\frac{1}{1+a^n}<\frac{1}{a^n}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$ 收敛，故由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 收敛．

2. 用比值审敛法判定下列级数的收敛性：

(1) $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{3^2}{2\cdot 2^2}+\frac{3^3}{3\cdot 2^3}+\cdots+\frac{3^n}{n\cdot 2^n}+\cdots$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$．

解 (1) 因 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\Big/\frac{3^n}{n\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{3}{2}>1$，故级数发散．

(2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{3^{n+1}}\Big/\dfrac{n^2}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{(n+1)^2}{n^2}=\dfrac{1}{3}<1$，故级数收敛．

(3) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\Big/\dfrac{2^n n!}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}2\left(\dfrac{n}{1+n}\right)^n=\dfrac{2}{e}<1$，故级数收敛．

(4) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\tan\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\Big/n\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1，故级数收敛．$$

3. 用根值审敛法判定下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{[\ln(n+1)]^n}$； (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{b}{a_n}\right)^n$，其中 $a_n\to a(n\to\infty)$，a_n,b,a 均为正数．

解 (1) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}<1$，故级数收敛．

(2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}=0<1$，故级数收敛．

(3) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{\frac{2n-1}{n}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2<1$，故级数收敛．

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b}{a_n}=\dfrac{b}{a}$，

当 $b<a$ 时，因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}<1$，故级数收敛；

当 $b>a$ 时，因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}>1$，故级数发散；

当 $b=a$ 时，级数的收敛性不能确定 $\Big($例如，$b=1,a_n=1,\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{b}{a_n}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$ 发散；又如，$b=1,a_n=n^{\frac{2}{n}}\to1(n\to\infty)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{b}{a_n}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛$\Big)$.

4. 判定下列级数的收敛性：

(1) $\dfrac{3}{4}+2\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+3\left(\dfrac{3}{4}\right)^3+\cdots+n\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+\cdots$；

(2) $\dfrac{1^4}{1!}+\dfrac{2^4}{2!}+\dfrac{3^4}{3!}+\cdots+\dfrac{n^4}{n!}+\cdots$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n(n+2)}$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$;

(5) $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\cdots+\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\cdots$;

(6) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2a+b}+\cdots+\frac{1}{na+b}+\cdots(a>0,b>0)$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}<1$，由比值审敛法知级数收敛.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n+1}=0<1$，由比值审敛法知级数收敛.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}\Big/\frac{1}{n}=1$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，由极限形式的比较审敛法知原级数发散.

(4) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}\Big/\left(\frac{2}{3}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\pi\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{3^n}}{\frac{\pi}{3^n}}=\pi$，而几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛，故由极限形式的比较审敛法知原级数收敛.

(5) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=1\neq0$，故级数发散.

(6) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{na+b}\Big/\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a+\frac{b}{n}}=\frac{1}{a}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故由极限形式的比较极限审敛法知原级数发散.

5. 判定下列级数是否收敛？如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛？

(1) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$;

(3) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots$;

(4) $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\cdots$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$.

解 (1) $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{1}{2}}}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ 是发散的；又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是交错级数，满足 $|u_n|>|u_{n+1}|$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，故由莱布尼茨定理知原级数收敛且条

件收敛.

(2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{3}<1$, 由比值审敛法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,故原级数绝对收敛.

(3) $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{3\cdot 2^n}$, 因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3\cdot 2^n}$ 是公比 $q=\frac{1}{2}(|q|<1)$ 的等比级数,故收敛,从而原级数绝对收敛.

(4) $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$, $|u_n|=\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{n+1}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 是发散的,故由比较审敛法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散,又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是交错级数,满足 $|u_n|>|u_{n+1}|$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, 故由莱布尼茨定理知原级数收敛且条件收敛.

(5) $u_n=\frac{(-1)^{n+1}2^{n^2}}{n!}$, $|u_n|=\frac{2^n\cdot 2^n\cdot\cdots\cdot 2^n}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}$, 由于 $2^n>k(k=1,2,\cdots,n)$, 故 $|u_n|>1$, 即原级数的一般项 u_n 随 n 增大而不趋于零,故该级数发散.

习题 12-3 幂级数

1. 求下列幂级数的收敛区间:

(1) $x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$;

(2) $1-x+\frac{x^2}{2^2}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n^2}+\cdots$;

(3) $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\cdot 4}+\frac{x^3}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots+\frac{x^n}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}+\cdots$;

(4) $\frac{x}{1\cdot 3}+\frac{x^2}{2\cdot 3^2}+\frac{x^3}{3\cdot 3^3}+\cdots+\frac{x^n}{n\cdot 3^n}+\cdots$;

(5) $\frac{2}{2}x+\frac{2^2}{5}x^2+\frac{2^3}{10}x^3+\cdots+\frac{2^n}{n^2+1}x^n+\cdots$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$, 故收敛半径为 1,收敛区间是

$(-1,1)$.

(2) $n\geqslant 1$ 起，$\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\dfrac{1}{(n+1)^2}\Big/\dfrac{1}{n^2}=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=1$，故收敛半径为 1，收敛区间为 $(-1,1)$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2(n+1)}=0$，故收敛半径为 $+\infty$，收敛区间是 $(-\infty,+\infty)$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{1}{3}$，故收敛半径为 3，收敛区间为 $(-3,3)$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}2\cdot\dfrac{n^2+1}{(n+1)^2+1}=2$，故收敛半径为 $\dfrac{1}{2}$，收敛区间为 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

(6) 这是缺(偶次幂)项的级数，把 $(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 视为数项级数的一般项 u_n，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}|x|^2=|x|^2,$$

当 $|x|<1$ 时，级数绝对收敛；当 $|x|>1$ 时，因一般项 $u_n\not\to 0(n\to\infty)$，级数发散，故原级数收敛半径为 1，收敛区间为 $(-1,1)$.

(7) 这是缺(奇次幂)项的级数.

方法一 与(6)类似，将它按数项级数处理，用比值法确定收敛半径和收敛区间.

方法二 令 $t=x^2$，先讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}t^{n-1}$ 的收敛区间.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\,\frac{2n+1}{2n-1}=\frac{1}{2},$$

故该级数的收敛半径为 2，因此，原级数的收敛半径为 $\sqrt{2}$，收敛区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=1$，故收敛半径为 1.

当 $|x-5|<1$ 时，级数收敛；当 $|x-5|>1$ 时，级数发散.

故级数的收敛区间为 $(4,6)$.

2. 利用逐项求导或逐项积分，求下列级数的和函数：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$；

(3) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$.

解 (1) 容易求出此级数的收敛半径为 1. 当 $-1<x<1$ 时，

$$\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x nx^{n-1}\mathrm{d}x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}.$$

在上式两端对 x 求导得

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

又原级数在 $x=\pm1$ 处发散，故它的和函数 $s(x)=\frac{1}{(1-x)^2}(-1<x<1)$.

(2) 不难求出此级数的收敛半径为 1. 当 $-1<x<1$ 时，

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}=\frac{x^4}{1-x^4},$$

在上式两端分别从 0 至 x 积分，并由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 在 $x=0$ 处收敛于 0. 故得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}&=\int_0^x\frac{x^4}{1-x^4}\mathrm{d}x\\&=\int_0^x\left(-1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x.\end{aligned}$$

又原级数在 $x=\pm1$ 处均发散，故它的和函数

$$s(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x(-1<x<1).$$

(3) 记级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$，其收敛半径为 1. 当 $-1<x<1$ 时，

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2},$$

在上式两端分别从 0 至 x 积分，并注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 在 $x=0$ 处收敛于 0，故得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

又原级数在 $x=\pm1$ 处均发散，故它的和函数

$$s(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\quad(-1<x<1).$$

习题 12-4 函数展开成幂级数

1. 求函数 $f(x)=\cos x$ 的泰勒级数,并验证它在整个数轴上收敛于这个函数.

解 在定点 x_0 处,因

$$f^{(n)}(x_0)=\cos\left(x_0+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

故 $f(x)$ 的泰勒级数为

$$\cos x_0+\cos\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)(x-x_0)+\frac{\cos(x_0+\pi)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+$$

$$\frac{\cos\left(x_0+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots.$$

因为对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\cos\left(\xi+\frac{n+1}{2}\pi\right)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\leqslant\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!},$$

(其中 ξ 介于 x_0 与 x 之间),而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0$,于是得

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

所以在整个数轴上,有

$$f(x)=\cos x=\cos x_0+\cos\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)(x-x_0)+\frac{\cos(x_0+\pi)}{2!}(x-x_0)^2+$$

$$\cdots+\frac{\cos\left(x_0+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots.$$

2. 将下列函数展开成 x 的幂级数,并求展开式成立的区间:

(1) $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$; (2) $\ln(a+x)\quad(a>0)$;

(3) a^x; (4) $\sin^2 x$;

(5) $(1+x)\ln(1+x)$; (6) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

解 (1) 由于 $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},x\in(-\infty,+\infty)$ 故

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n,x\in(-\infty,+\infty).$$

于是

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) $\ln(a+x)=\ln a+\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)$，利用

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,\quad x\in(-1,+1],$$

得

$$\ln(a+x)=\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{a}\right)^n,\quad x\in(-a,+a].$$

(3) 利用 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},x\in(-\infty,+\infty)$，得

$$a^x=e^{x\ln a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n,x\in(-\infty,+\infty).$$

(4) **方法一** 利用

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},x\in(-\infty,+\infty)$$

得

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n}}{2(2n)!},x\in(-\infty,+\infty).$$

方法二 $(\sin^2 x)'=2\sin x\cos x=\sin 2x$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!},x\in(-\infty,+\infty),$$

将上式两端从 0 至 x 积分并逐项积分，得

$$\sin^2 x=\int_0^x(\sin^2 x)'\mathrm{d}x=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!}\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},x\in(-\infty,+\infty).$$

(5) **方法一** 因为

$$[(1+x)\ln(1+x)]'=\ln(1+x)+1=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},x\in(-1,1).$$

将上式两端从 0 至 x 积分并逐项积分得

$$(1+x)\ln(1+x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n-1)n},x\in(-1,1),$$

又在 $x=1$ 处，上式右端的幂级数收敛，且函数 $(1+x)\ln(1+x)$ 连续，故

$$(1+x)\ln(1+x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)},x\in(-1,1].$$

方法二 利用 $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},x\in(-1,1]$，得

$$\begin{aligned}(1+x)\ln(1+x)&=\ln(1+x)+x\ln(1+x)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{n}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n-1}\\&=x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\frac{(-1)^n}{n-1}\right]x^n\\&=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)},x\in(-1,1].\end{aligned}$$

(6) **方法一** 利用$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\cdots,x\in[-1,1]$，并因为$\int_0^x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\sqrt{1+x^2}-1$，以 x^2 替换上面幂级数中的 x，得

$$\begin{aligned}\int_0^x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x&=\sqrt{1+x^2}-1\\&=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^6-\cdots+\\&\quad(-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}x^{2n}+\cdots.\end{aligned}$$

在$(-1,1)$内将上式两端对 x 求导，得

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}&=x-\frac{1}{2}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^5-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n-2)}x^{2n-1}+\cdots\\&=x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n-2)}x^{2n+1}\\&=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1},x\in(-1,1).\end{aligned}$$

在 $x=\pm 1$ 处上式右端的级数均收敛且函数 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 连续，故

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1},x\in[-1,1].$$

方法二 将 x^2 替换展开式

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}x^n(x\in(-1,1])$$

中的 x,得

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}x^{2n},x\in[-1,1],$$

从而得

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}&=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}x^{2n+1}\\&=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1},x\in[-1,1].\end{aligned}$$

3. 将下列函数展开成 $(x-1)$ 的幂级数,并求展开式成立的区间:

(1) $\sqrt{x^3}$; (2) $\lg x$.

解 (1) 当 $m>0$ 时,因

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots,$$

$$x\in[-1,1],$$

而
$$\sqrt{x^3}=[1+(x-1)]^{\frac{3}{2}},$$

在以上二项展开式中取 $m=\frac{3}{2}$,并用$(x-1)$替换其中的 x,得

$$\begin{aligned}\sqrt{x^3}&=1+\frac{3}{2}(x-1)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)(x-1)^2+\cdots\\&\quad+\frac{1}{n!}\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\cdot\cdots\cdot\left(\frac{3}{2}-n+1\right)(x-1)^n+\cdots\\&=1+\frac{3}{2}(x-1)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\cdot(-1)^n1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^{n+2}(n+2)!}(x-1)^{n+2}\\&=1+\frac{3}{2}(x-1)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{3}{(n+1)(n+2)2^n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n+2},x\in[0,2].\end{aligned}$$

(2) $\lg x=\frac{\ln x}{\ln 10}=\frac{1}{\ln 10}\ln[1+(x-1)]$,利用

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},x\in(-1,1],$$

将上式中的 x 换成$(x-1)$,得

$$\lg x=\frac{1}{\ln 10}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n},x\in(0,2].$$

4. 将函数 $f(x)=\cos x$ 展开成 $\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的幂级数.

解 $\cos x=\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

将 $x+\frac{\pi}{3}$ 替换以下两式

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

中的 x,得

$$\begin{aligned}\cos x&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(2n)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}\right],x\in(-\infty,+\infty).\end{aligned}$$

5. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 展开成$(x-3)$的幂级数.

解 利用 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,x\in(-1,1)$ 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}&=\frac{1}{3+x-3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{x-3}{3}\right)}\\&=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-3}{3}\right)^n,\frac{3-x}{3}\in(-1,1),\end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n,x\in(0,6).$$

6. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成$(x+4)$的幂级数.

解 $\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$,

其中

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{-3+(x+4)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+4}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n,$$

$\frac{x+4}{3}\in(-1,1)$ 即 $x\in(-7,-1)$;

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{-2+(x+4)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+4}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n,$$

$\frac{x+4}{2} \in (-1,1)$ 即 $x \in (-6,-2)$. 于是

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n,$$

$x \in (-7,-1) \cap (-6,-2) = (-6,-2)$.

习题 12-5　函数的幂级数展开式的应用

1. 利用函数的幂级数展开式求下列各数的近似值:

(1) $\ln 3$(误差不超过 0.000 1);

(2) $\sqrt{e}$(误差不超过 0.001);

(3) $\sqrt[9]{522}$(误差不超过 0.000 01);

(4) $\cos 2°$(误差不超过 0.000 1).

解　(1) $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots\right), x \in (-1,1)$.

令 $\frac{1+x}{1-x}=3$, 可得 $x=\frac{1}{2}$. 从而

$$\ln 3 = \ln\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}+\cdots\right).$$

$$|r_n| = 2\left(\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}+\frac{1}{(2n+3)2^{2n+3}}+\cdots\right)$$

$$= \frac{2}{(2n+1)2^{2n+1}}\left(1+\frac{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}{(2n+3)\cdot 2^{2n+3}}+\frac{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}{(2n+5)\cdot 2^{2n+5}}+\cdots\right)$$

$$< \frac{2}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots\right)$$

$$= \frac{2}{(2n+1)2^{2n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3(2n+1)2^{2n-2}},$$

$$|r_5| < \frac{1}{3\cdot 11\cdot 2^8} \approx 0.000\ 12,$$

$$|r_6| < \frac{1}{3\cdot 13\cdot 2^{10}} \approx 0.000\ 03 < 10^{-4},$$

故取 $n=6$, 则

$$\ln 3 \approx 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3 \cdot 2^3}+\frac{1}{5 \cdot 2^5}+\cdots+\frac{1}{11 \cdot 2^{11}}\right)$$，考虑到舍入误差，计算时应取五位小数，从而得 $\ln 3 \approx 1.0986$.

(2) $$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots, x \in (-\infty, +\infty).$$

令 $x=\frac{1}{2}$，得

$$\sqrt{e} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2! \cdot 2^2}+\cdots+\frac{1}{n!2^n}+\cdots.$$

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}+\frac{1}{(n+2)!2^{n+2}}+\cdots \\ &= \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}\left[1+\frac{1}{(n+2) \cdot 2}+\frac{1}{(n+2)(n+3) \cdot 2^2}+\cdots\right] \\ &< \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(n+1)!2^n}, \end{aligned}$$

$$r_4 < \frac{1}{5!\,2^4} \approx 0.0005 < 10^{-3},$$

故取 $n=4$，计算时取四位小数可得

$$\sqrt{e} \approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!2^2}+\frac{1}{3!2^3}+\frac{1}{4!2^4} \approx 1.648.$$

(3) $\sqrt[9]{522} = \sqrt[9]{2^9+10} = 2\left(1+\frac{10}{2^9}\right)^{\frac{1}{9}}$，因

$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdot\cdots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots \quad (-1<x<1).$$

故
$$\begin{aligned} \sqrt[9]{522} &= 2\left(1+\frac{10}{2^9}\right)^{\frac{1}{9}} \\ &= 2\left[1+\frac{1}{9} \cdot \frac{10}{2^9}+\frac{\frac{1}{9}(\frac{1}{9}-1)}{2!} \cdot \frac{10^2}{2^{18}}+\cdots+\frac{\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}-1\right)\cdot\cdots\cdot\left(\frac{1}{9}-n+1\right)}{n!} \cdot \frac{10^n}{2^{9n}}+\cdots\right] \\ &= 2 \cdot \left[1+\frac{1}{9} \cdot \frac{10}{2^9}-\frac{\frac{1}{9} \cdot \frac{8}{9}}{2!} \cdot \frac{10^2}{2^{18}}+\cdots\right] \end{aligned}$$

$$=2+\frac{2}{9}\cdot\frac{10}{2^9}-\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10^2}{2^{18}}+\cdots.$$

上式右端从第 2 项起为一交错级数，故有

$$|r_3|\leqslant u_4=\frac{8\cdot 17}{3\cdot 9^3}\cdot\frac{10^3}{2^{27}}<10^{-6},$$

取 3 项，并在计算时取六位小数，可得

$$\sqrt[9]{522}\approx 2+\frac{2}{9}\cdot\frac{10}{2^9}-\frac{8}{9^2}\cdot\frac{10^2}{2^{18}}\approx 2.00430.$$

(4) $\cos 2^\circ=\cos\frac{\pi}{90}=1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4-\cdots,$

$$|r_2|\leqslant u_3=\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4\approx 10^{-8},$$

故取 2 项并在计算时取五位小数，可得

$$\cos 2^\circ\approx 1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2\approx 0.9994.$$

2. 利用被积函数的幂级数展开式求下列定积分的近似值：

(1) $\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx$（误差不超过 0.0001）；

(2) $\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx$（误差不超过 0.001).

解 (1) $\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx=\int_0^{0.5}(1-x^4+x^8-x^{12}+\cdots+(-1)^n x^{4n}+\cdots)dx$

$$=\left(x-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{9}x^9-\frac{1}{13}x^{13}+\cdots\right)\Big|_0^{0.5}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}-\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{2^{13}}+\cdots,$$

上式右端为一交错级数，有

$$|r_3|\leqslant u_4=\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{2^{13}}\approx 0.000009<10^{-4},$$

故取 3 项，并在计算时取五位小数，可得

$$\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}\approx 0.4940.$$

(2) 因 $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots(-1<x<1)$,

故 $\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx=\int_0^{0.5}\left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}+\cdots\right)dx$

$$=\left(x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^5}{25}-\frac{x^7}{49}+\cdots\right)\Big|_0^{0.5}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2^5} - \frac{1}{49}\cdot\frac{1}{2^7} + \cdots,$$

由于 $$|r_3| \leqslant u_4 = \frac{1}{49}\cdot\frac{1}{2^7} \approx 0.0002 < 10^{-3},$$

所以取 3 项，并在计算时取四位小数，可得

$$\int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x}dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5}\cdot\frac{1}{25}$$
$$\approx 0.4874 \approx 0.487.$$

3. 试用幂级数求下列各微分方程的解：

(1) $y' - xy - x = 1$;

(2) $y'' + xy' + y = 0$;

(3) $(1-x)y' = x^2 - y$.

解 (1) 设方程的解为 $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$($a_0$ 为任意常数)，代入方程，则有如下竖式(注意对齐同次幂项)

$$\begin{array}{rl} y' = & a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots \\ -xy = & \quad -a_0 x - a_1 x^2 - \cdots \qquad -a_{n-1}x^n - \cdots \\ -x = & \quad -x \\ \hline \end{array}$$

$$1 = a_1 + (2a_2 - a_0 - 1)x + (3a_3 - a_1)x^2 + \cdots + [(n+1)a_{n+1} - a_{n-1}]x^n + \cdots$$

比较系数可得

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = \frac{a_0+1}{2},$$

$$a_3 = \frac{1}{3}, \qquad a_4 = \frac{a_2}{4} = \frac{a_0+1}{2\times 4},$$

$$a_5 = \frac{a_3}{5} = \frac{1}{3\times 5}, \qquad a_6 = \frac{a_4}{6} = \frac{a_0+1}{2\times 4\times 6},$$

…

$$a_{2n-1} = \frac{1}{3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}, \qquad a_{2n} = \frac{a_0+1}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n} = \frac{a_0+1}{n!2^n}.$$

不难求出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}x^{2n-1}$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n}$ 的收敛域都是$(-\infty,+\infty)$，故

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}x^{2n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{3\times 5\times\cdots\times(2n-1)} + (a_0+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!2^n} - 1$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{3\times 5\times\cdots\times(2n-1)} + (a_0+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n - 1.$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n=e^{\frac{x^2}{2}}$，记 $a_0+1=C, 1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)=(2n-1)!!$，则

$$y=Ce^{\frac{x^2}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!!}x^{2n-1}-1, x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) 设 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 是方程的解，其中 a_0, a_1 是任意常数，则

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n,$$

代入方程 $y''+xy'+y=0$，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}+na_n+a_n]x^n=0.$$

故必有

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_n=0,$$

即

$$a_{n+2}=-\frac{a_n}{n+2}\qquad(n=0,1,2,\cdots).$$

可见，当 $n=2(k-1)$ 时，

$$a_{2k}=\left(-\frac{1}{2k}\right)a_{2k-2}=\left(-\frac{1}{2k}\right)\left(-\frac{1}{2k-2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}\right)a_0$$
$$=\frac{a_0(-1)^k}{k!2^k}.$$

当 $n=2k-1$ 时，

$$a_{2k+1}=\left(-\frac{1}{2k+1}\right)a_{2k-1}=\left(-\frac{1}{2k+1}\right)\left(-\frac{1}{2k-1}\right)\cdots\left(-\frac{1}{3}\right)a_1$$
$$=\frac{a_1(-1)^k}{(2k+1)!!}.$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}$ 的收敛域均为 $(-\infty,+\infty)$，故

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_0(-1)^n}{n!2^n}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_1(-1)^n}{(2n+1)!!}x^{2n+1},$$

即

$$y=a_0e^{-\frac{x^2}{2}}+a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}x^{2n+1}, x\in(-\infty,+\infty).$$

(3) 设 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 是方程的解，代入方程，得

$$(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=x^2-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

有
$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=x^2,$$

将上式左边第一个级数写成 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ ，则有

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}+(1-n)a_n]x^n=x^2.$$

比较系数，得

$$a_1+a_0=0,\ 2a_2=0,\ 3a_3-a_2=1,$$
$$(n+1)a_{n+1}+(1-n)a_n=0\quad(n\geqslant 3).$$

即
$$a_1=a_0,\ a_2=0,\ a_3=\frac{1}{3},a_{n+1}=\frac{n-1}{n+1}a_n\quad(n\geqslant 3),$$

或写成

$$a_n=\frac{n-2}{n}a_{n-1}=\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{n-4}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{n(n-1)}\quad(n\geqslant 4).$$

于是 $\quad y=a_0-a_0x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{10}x^5+\cdots+\frac{2}{n(n-1)}x^n+\cdots,$

或写成 $y=a_0(1-x)+x^3\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{6}x+\frac{1}{10}x^2+\cdots+\frac{2}{(n+2)(n+3)}x^n+\cdots\right].$

4. 试用幂级数求下列方程满足所给初始条件的特解：

(1) $y'=y^2+x^3,y\big|_{x=0}=\frac{1}{2}$;

(2) $(1-x)y'+y=1+x,y\big|_{x=0}=0.$

解 (1) 因 $y\big|_{x=0}=\frac{1}{2}$ ，故设方程的特解为 $y=\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ ，则

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n.$$

代入方程，有

$$\begin{aligned}a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n&=x^3+\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\right)^2\\&=x^3+\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n+\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\right)^2\\&=x^3+\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n+[a_1^2x^2+2a_1a_2x^3+(a_2^2+\\&\quad 2a_1a_3)x^4+(\sum_{i+j=n}a_ia_j)x^n+\cdots].\end{aligned}$$

即 $\quad a_1+(2a_2-a_1)x+(3a_3-a_2-a_1^2)x^2+(4a_4-a_3-2a_1a_2)x^3$

$$+\cdots+\Big[(n+1)a_{n+1}-a_n-\sum_{i+j=n}a_ia_j\Big]x^n+\cdots=\frac{1}{4}+x^3.$$

比较系数,得 $a_1=\dfrac{1}{4},2a_2-a_1=0,3a_3-a_2-a_1^2=0,4a_4-a_3-2a_1a_2=1,$

$$\cdots,(n+1)a_{n+1}-a_n-\sum_{i+j=n}a_ia_j=0\quad(n\geqslant 4).$$

依次解得
$$a_1=\frac{1}{4},a_2=\frac{1}{8},a_3=\frac{1}{16},a_4=\frac{9}{32},\cdots.$$

故
$$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\frac{9}{32}x^4+\cdots.$$

(2) 因 $y|_{x=0}=0$,故设 $y=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 是方程的特解,则 $y'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$,代入方程,有

$$(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=1+x,$$

即
$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=1+x,$$

或写成

$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}+(1-n)a_n]x^n=1+x.$$

比较系数,得 $\quad a_1=1,a_2=\dfrac{1}{2},a_{n+1}=\dfrac{n-1}{n+1}a_n(n\geqslant 2)$,或写成

$$a_n=\frac{n-2}{n}a_{n-2}=\frac{(n-2)(n-3)\cdots 1}{n(n-1)\cdots 3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{n(n-1)}\quad(n\geqslant 3).$$

故
$$y=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}x^n+\cdots.$$

5. 利用欧拉公式将函数 $e^x\cos x$ 展开成 x 的幂级数.

解 由欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 知

$$\cos x=\mathrm{Re}(e^{ix}),$$

故

$$e^x\cos x=e^x\cdot\mathrm{Re}(e^{ix})=\mathrm{Re}(e^x\cdot e^{ix})=\mathrm{Re}[e^{(1+i)x}].$$

因为

$$e^{(1+i)x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(1+i)^nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\Big)\Big]^n\frac{x^n}{n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\Big)2^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{x^n}{n!},x\in(-\infty,+\infty),$$

所以

$$e^x\cos x=\mathrm{Re}[e^{(1+i)x}]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{4}\cdot 2^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{x^n}{n!},x\in(-\infty,+\infty).$$

习题 12-6　函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质

1. 已知函数序列 $S_n(x)=\sin\frac{x}{n}(n=1,2,3,\cdots)$ 在$(-\infty,+\infty)$上收敛于 0.

(1) 问 $N(\varepsilon,x)$ 取多大,能使当 $n>N$ 时, $S_n(x)$ 与其极限之差的绝对值小于正数 ε;

(2) 证明 $S_n(x)$ 在任一有限区间 $[a,b]$ 上一致收敛.

解 (1) 由于 $|S_n(x)-0|=\left|\sin\frac{x}{n}\right|\leqslant\frac{|x|}{n}$,因此对于正数 ε,取 $N(\varepsilon,x)\geqslant\frac{|x|}{\varepsilon}$, 则当 $n>N$ 时,就有

$$|S_n(x)-0|\leqslant\frac{|x|}{n}<\varepsilon.$$

证 (2) 记 $M=\max\{|a|,|b|\}$, 则 $\forall x\in[a,b]$, $|x|\leqslant M$,于是

$$|S_n(x)-0|\leqslant\frac{|x|}{n}\leqslant\frac{M}{n}.$$

故 $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{M}{\varepsilon}\right]+1$,当 $n>N$ 时,对一切 $x\in[a,b]$ 都有

$$|S_n(x)-0|\leqslant\frac{|x|}{n}<\frac{M}{N}<\varepsilon,$$

即 $S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0.

2. 已知级数 $x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots$ 在$(-\infty,+\infty)$上收敛.

(1) 求出该级数的和;

(2) 问 $N(\varepsilon,x)$ 取多大,能使当 $n>N$ 时,级数的余项 r_n 的绝对值小于正数 ε;

(3) 分别讨论级数在区间$[0,1]$,$\left[\frac{1}{2},1\right]$上的一致收敛性.

解 (1) 设该级数的和函数为 $s(x)$,当 $x=0$ 时,$s(0)=0$;当 $x\neq0$ 时,该级数是公比为 $\frac{1}{1+x^2}$ 的等比级数,且 $\frac{1}{1+x^2}<1$,故

$$s(x)=\frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}}=1+x^2.$$

于是

$$s(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

(2) $r_n(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+2}}+\cdots$

$$=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}\left[1+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{(1+x^2)^2}+\cdots\right].$$

当 $x=0$ 时，$r_n(x)=0$，$\forall\varepsilon>0$，取 $N=1$，则当 $n>N$ 时，就有

$$|r_n(x)|<\varepsilon;$$

当 $x\neq 0$ 时，$r_n(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}}=\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$，$\forall\varepsilon>0$，取

$$N=\left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln(1+x^2)}\right]+1,$$

则
$$|r_n(x)|=\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}<\frac{1}{(1+x^2)^{N-1}}=\varepsilon.$$

(3) 该级数的各项 $u_n(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}(n=0,1,2,\cdots)$ 在区间$[0,1]$上是连续的，如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$ 在$[0,1]$上一致收敛，则由定理1知，其和函数 $s(x)$ 在$[0,1]$上连续．今 $s(x)$ 在$[0,1]$有间断点 $x=0$，由此推知该级数在$[0,1]$上不一致收敛．

在区间$\left[\frac{1}{2},1\right]$上，因为

$$|r_n(x)|=\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\leqslant\frac{1}{\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{n-1}}=\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1},$$

所以，$\forall\varepsilon>0$，取 $N=[\log_{\frac{4}{5}}\varepsilon]+1$，当 $n>N$ 时，对一切 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，有

$$|r_n(x)|\leqslant\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}<\left(\frac{4}{5}\right)^{N-1}=\varepsilon.$$

即级数在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上一致收敛．

3. 按定义讨论下列级数在所给区间上的一致收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$，$-\infty<x<+\infty$；

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$，$0<x<1$.

解 (1) 此级数为交错级数，且满足莱布尼茨定理的条件.

$\forall x \in (-\infty, +\infty)$,

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} < \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{1+nx^2+\cdots+x^{2n}} < \frac{1}{n},$$

故 $\forall \varepsilon > 0$，取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$，有

$$|r_n(x)| < \varepsilon,$$

即该级数在$(-\infty, +\infty)$上一致收敛.

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(x^n - x^{n+1})$，其部分和函数

$$s_n(x) = (1-x)+(x-x^2)+\cdots+(x^n-x^{n+1}) = 1-x^{n+1},$$

有和函数 $\quad s(x) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(1-x^{n+1}) = 1, x \in (0,1).$

且 $\quad |r_n(x)| = |s_n(x) - s(x)| = x^{n+1}, x \in (0,1).$

取一列 $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n+1}} (n=1,2,\cdots), x_n \in (0,1)$. 于是对 $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$，不论 n 多么大，总有 $x_n \in (0,1)$，使得

$$|r_n(x_n)| = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right]^{n+1} = \frac{1}{3} > \frac{1}{4} = \varepsilon_0.$$

因此，该级数在开区间$(0,1)$内不一致收敛.

4. 利用魏尔斯特拉斯判别法证明下列级数在所给区间上的一致收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}, -\infty < x < +\infty$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}, -\infty < x < +\infty$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, 0 \leqslant x < +\infty$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n!}, |x| < 10$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(1-e^{-nx})}{n^2+x^2}, 0 \leqslant x < +\infty$.

证 (1) $\forall x \in (-\infty, +\infty)$，因为 $|\cos nx| \leqslant 1$，所以

$$\left|\frac{\cos nx}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛，从而原级数在$(-\infty, +\infty)$上一致收敛.

(2) $\forall x \in (-\infty, +\infty)$，因为 $|\sin nx| \leqslant 1$，所以

$$\left|\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\right|\leqslant\frac{1}{(n^4+x^4)^{\frac{1}{3}}}\leqslant\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 收敛,从而原级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2\cdot e^{-nx}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{e^{nx}}$,由于当 $x\in[0,+\infty)$时,

$$e^{nx}=1+nx+\frac{1}{2!}(nx)^2+\frac{1}{3!}(nx)^3+\cdots>\frac{1}{2!}(nx)^2=\frac{n^2x^2}{2},$$

故
$$\left|\frac{x^2}{e^{nx}}\right|<\frac{2}{n^2},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ 收敛,故原级数在$[0,+\infty)$ 上一致收敛.

(4) $\forall x\in(-10,10)$, $\left|\frac{e^{-nx}}{n!}\right|<\frac{(e^{10})^n}{n!}$,

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(e^{10})^n}{n!}$ 收敛(收敛于 $e^{e^{10}}-1$),故原级数在$(-10,10)$上一致收敛.

(5) $\forall x\in[0,+\infty)$,由于 $0<e^{-nx}<1$,故

$$\left|\frac{(-1)^n(1-e^{-nx})}{n^2+x^2}\right|=\frac{1-e^{-nx}}{n^2+x^2}<\frac{1}{n^2},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,从而原级数在$[0,+\infty)$ 上一致收敛.

习题12-7 傅里叶级数

1. 下列周期函数 $f(x)$的周期为 2π,试将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数,如果 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi)$ 上的表达式为:

(1) $f(x)=3x^2+1(-\pi\leqslant x<\pi)$;

(2) $f(x)=e^{2x}(-\pi\leqslant x<\pi)$;

(3) $f(x)=\begin{cases}bx, & -\pi\leqslant x<0,\\ ax, & 0\leqslant x<\pi(a,b\text{ 为常数,且 }a>b>0).\end{cases}$

解 (1) $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)dx=2(\pi^2+1)$;

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\cos nx\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}(3x^2+1)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}6x\sin nx\,dx\right]$$

$$=\frac{6}{n^2\pi}\left(x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{12}{n^2}(-1)^n-\frac{6}{n^3\pi}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}$$
$$=\frac{(-1)^n12}{n^2}(n=1,2,\cdots);$$

由于 $(3x^2+1)\sin nx$ 是奇函数，故

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\sin nx\mathrm{d}x=0.$$

因为 $f(x)$ 满足收敛定理的条件且在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，故

$$f(x)=\pi^2+1+12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}}{2\pi}$;

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\left(\mathrm{e}^{2x}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}\cdot n\sin nx\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{(-1)^n(\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi})}{2\pi}+\frac{n}{4\pi}\left(\mathrm{e}^{2x}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}n\cdot\cos nx\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{(-1)^n(\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi})}{2\pi}-\frac{n^2}{4}a_n,$$

故

$$a_n=\frac{2(-1)^n(\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi})}{(n^2+4)\pi}(n=1,2,\cdots);$$

用分部积分法得

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{n}{2}a_n=-\frac{n(-1)^n(\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi})}{(n^2+4)\pi}(n=1,2\cdots).$$

$f(x)$ 满足收敛定理的条件，而在 $x=(2k+1)\pi$ 处不连续($k\in\mathbf{Z}$)，故

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+4}(2\cos nx-n\sin nx)\right],$$
$$x\neq(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}.$$

(3)
$$a_0=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}bx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}ax\mathrm{d}x\right]=\frac{\pi}{2}(a-b);$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}bx\cos nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}ax\cos nx\mathrm{d}x\right].$$

在上式右端第一个积分中令 $x=-t$，

$$\int_{-\pi}^{0}bx\cos nx\mathrm{d}x=\int_{0}^{\pi}-bt\cos nt\mathrm{d}t=\int_{0}^{\pi}-bx\cos nx\mathrm{d}x,$$

故

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(a-b)x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{a-b}{n\pi}\left(x\sin nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{a-b}{n^2\pi}(\cos\pi-1)=\frac{b-a}{n^2\pi}[1-(-1)^n](n=1,2,\cdots);$$

同理，

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}bx\sin nx\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}ax\sin nx\,\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(a+b)x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{a+b}{n\pi}\left(-x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{a+b}{n\pi}\left[(-1)^{n+1}\pi+\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right]=\frac{a+b}{n}(-1)^{n+1}(n=1,2,\cdots).$$

$f(x)$ 满足收敛定理的条件，而在 $x=(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$ 处不连续. 故

$$f(x)=\frac{\pi}{4}(a-b)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{[1-(-1)^n](b-a)}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n-1}(a+b)}{n}\sin nx\right\},$$

$$x\neq(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}.$$

2. 将下列函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数：

(1) $f(x)=2\sin\frac{x}{3}\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$；

(2) $f(x)=\begin{cases}e^x, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$

解 (1) 设 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 经周期延拓而得的函数，$\varphi(x)$ 在$(-\pi,\pi)$内连续，$x=\pm\pi$ 是 $\varphi(x)$ 的间断点. 又 $\varphi(x)$ 满足收敛定理的条件，故在$(-\pi,\pi)$内，它的傅里叶级数收敛于 $f(x)$.

由于 $2\sin\frac{x}{3}$ 是奇函数，故 $a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots)$；

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2\sin\frac{x}{3}\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\left(\frac{1}{3}-n\right)x-\cos\left(\frac{1}{3}+n\right)x\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin\left(n-\frac{1}{3}\right)\pi}{n-\frac{1}{3}}-\frac{\sin\left(n+\frac{1}{3}\right)\pi}{n+\frac{1}{3}}\right]$$

$$=\frac{6}{\pi}\left[\frac{-\cos n\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{3n-1}-\frac{\cos n\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{3n+1}\right]$$

$$=(-1)^{n+1}\cdot\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\cdot\frac{n}{9n^2-1}(n=1,2,\cdots).$$

故

$$f(x)=\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{9n^2-1}\sin nx, x\in(-\pi,\pi).$$

(2) 设 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 经周期延拓而得的函数，它在$(-\pi,\pi)$内连续，$x=\pm\pi$是 $\varphi(x)$ 的间断点．又 $\varphi(x)$ 满足收敛定理的条件，故在$(-\pi,\pi)$内它的傅里叶级数收敛于 $f(x)$．

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}e^x dx+\int_0^{\pi}dx\right]=\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{\pi};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}e^x\cos nx dx+\int_0^{\pi}\cos nx dx\right]=\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{\pi(1+n^2)}(n=1,2,\cdots);$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}e^x\sin nx dx+\int_0^{\pi}\sin nx dx\right]\\&=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{-n[1-(-1)^n e^{-\pi}]}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}\right\}(n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}\right]\cos nx+\right.\\&\left.\left[\frac{-n+(-1)^n n e^{-\pi}}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}\right]\sin nx\right\}, x\in(-\pi,\pi).\end{aligned}$$

3. 将函数 $f(x)=\cos\frac{x}{2}(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成傅里叶级数.

解　$f(x)=\cos\frac{x}{2}$ 是偶函数，故 $b_n=0\quad(n=1,2,\cdots)$.

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nx dx\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x+\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]dx\\&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{n-\frac{1}{2}}+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{n+\frac{1}{2}}\right]\\&=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-\cos n\pi}{2n-1}+\frac{\cos n\pi}{2n+1}\right)=(-1)^{n+1}\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\&=(-1)^{n+1}\frac{4}{\pi(4n^2-1)}(n=0,1,2,\cdots).\end{aligned}$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件，且在$[-\pi,\pi]$上连续，故

$$f(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{4n^2-1}\cos nx, x\in[-\pi,\pi].$$

4. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在$[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}, & -\pi\leqslant x<-\dfrac{\pi}{2},\\ x, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\pi,\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解 $f(x)$ 是奇函数，故 $a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots)$；

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nx\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin nx\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\mathrm{d}x\right]+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{-\cos\frac{n\pi}{2}}{n}+\frac{2\sin\frac{n\pi}{2}}{\pi n^2}+\frac{\cos\frac{n\pi}{2}-\cos n\pi}{n}$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{(-1)^{n+1}}{n}(n=1,2,\cdots).$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件，而在 $x=(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$ 处间断，故

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\sin nx,x\neq(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z}).$$

5. 将函数 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成正弦级数.

解 作

$$\varphi(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(0,\pi],\\ 0, & x=0,\\ -f(-x), & x\in(-\pi,0),\end{cases}$$

$\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的奇延拓. 令 $\Phi(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的周期延拓，则 $\Phi(x)$ 满足收敛定理的条件，而在 $x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 处间断，又在$(0,\pi]$ 上，$\Phi(x)\equiv f(x)$，因此 $\Phi(x)$ 的傅里叶级数在$(0,\pi]$ 上收敛于 $f(x)$.

$$a_n=0(n=0,1,2,\cdots);$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\pi-x}{2}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x-\pi}{2n}\cos nx-\frac{1}{2n^2}\sin nx\right]_0^\pi$$

$$=\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots),$$

故

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx, x\in(0,\pi].$$

6. 将函数 $f(x)=2x^2(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 (1) 展开成正弦级数.

令

$$\varphi(x)=\begin{cases}2x^2, & x\in[0,\pi],\\ -2x^2, & x\in(-\pi,0)\end{cases}$$

是 $f(x)$ 的奇延拓,又 $\Phi(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的周期延拓函数,则 $\Phi(x)$ 满足收敛定理的条件,而在 $x=(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$ 处间断,又在$[0,\pi]$上 $\Phi(x)\equiv f(x)$,故它的傅里叶级数在$[0,\pi)$ 上收敛于 $f(x)$.

$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots);$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\sin nx\mathrm{d}x\\&=\frac{4}{\pi}\left[\frac{-x^2}{n}\cos nx+\frac{2x}{n^2}\sin nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right]_0^{\pi}\\&=\frac{4}{\pi}\left[\frac{-\pi^2(-1)^n}{n}+\frac{(-1)^n2}{n^3}-\frac{2}{n^3}\right]\quad(n=1,2,\cdots),\end{aligned}$$

故

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{n^3}-\frac{\pi^2}{n}\right)(-1)^n-\frac{2}{n^3}\right]\sin nx, x\in[0,\pi).$$

(2) 展开成余弦级数.

令 $\varphi(x)=2x^2, x\in(-\pi,\pi]$ 是 $f(x)$ 的偶延拓,又 $\Phi(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的周期延拓函数,则 $\Phi(x)$ 满足收敛定理的条件且处处连续,又在$[0,\pi]$上,$\Phi(x)\equiv f(x)$,故它的傅里叶级数在$[0,\pi]$ 上收敛于 $f(x)$.

$$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots),$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi^2;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\cos nx\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{8}{n^2}\quad(n=1,2,\cdots).$$

故

$$f(x)=\frac{2}{3}\pi^2+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, x\in[0,\pi].$$

7. 设周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π. 证明:

(1) 如果 $f(x-\pi)=-f(x)$,则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_0=0$, $a_{2k}=0$, $b_{2k}=0$ $(k=1,2,\cdots)$;

(2) 如果 $f(x-\pi)=f(x)$,则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_{2k+1}=0$, $b_{2k+1}=0(k=0,1,2,\cdots)$.

证 (1) $$a_0=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x\right]$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}-f(x-\pi)\mathrm{d}x\right]$$
在上式第二个积分中令 $x-\pi=u$,则
$$a_0=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{0}f(u)\mathrm{d}u\right]=0.$$
同理可得
$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\right]$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}-f(x-\pi)\cos nx\mathrm{d}x\right]$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{0}f(u)\cos(n\pi+nu)\mathrm{d}u\right]$$
及
$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin nx\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{0}f(u)\sin(n\pi+nu)\mathrm{d}u\right].$$
当 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时,$\cos(n\pi+nu)=\cos nu$,$\sin(n\pi+nu)=\sin nu$,
于是有
$$a_{2k}=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos 2kx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}f(x)\cos 2kx\mathrm{d}x\right]$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos 2kx\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{0}f(u)\cos 2ku\mathrm{d}u\right]=0,$$
及
$$b_{2k}=0\quad(k\in\mathbf{N}^*).$$
(2) 与(1) 的做法类似,有
$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{0}f(u)\cos(n\pi+nu)\mathrm{d}u\right]$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin nx\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{0}f(u)\sin(n\pi+nu)\mathrm{d}u\right]$$
当 $n=2k+1(k\in\mathbf{N})$ 时,$\cos(n\pi+nu)=-\cos nu$,
$$\sin(n\pi+nu)=-\sin nu,$$
故有 $$a_{2k+1}=0,b_{2k+1}=0\quad(k\in\mathbf{N}).$$

习题12-8 一般周期函数的傅里叶级数

1. 将下列各周期函数展开成傅里叶级数(下面给出函数在一个周期内的表

达式)：

(1) $$f(x)=1-x^2\left(-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2}\right);$$

(2) $$f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2},\\ -1, & \dfrac{1}{2}\leqslant x<1;\end{cases}$$

(3) $$f(x)=\begin{cases}2x+1, & -3\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<3.\end{cases}$$

解 (1) 函数 $f(x)$ 是半周期 $l=\frac{1}{2}$ 的偶函数，故

$$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots);$$

$$a_0=\frac{2}{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\mathrm{d}x=\frac{11}{6};$$

$$a_n=\frac{2}{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\cos\frac{n\pi x}{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\cos 2n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=4\left[\frac{1-x^2}{2n\pi}\sin 2n\pi x-\frac{2x}{4n^2\pi^2}\cos 2n\pi x+\frac{2}{8n^3\pi^3}\sin 2n\pi x\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{n^2\pi^2}\quad(n=1,2,\cdots).$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件且处处连续，故有

$$f(x)=\frac{11}{12}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos(2n\pi x),x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) 函数 $f(x)$ 的半周期 $l=1$.

$$a_0=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2};$$

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{0}x\cos n\pi x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{2}}\cos n\pi x\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\cos n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x+\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right]_1^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\quad(n=1,2,\cdots);$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x \mathrm{d}x$$
$$= \int_{-1}^{0} x\sin n\pi x \mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{1}{2}} \sin n\pi x \mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sin n\pi x \mathrm{d}x$$
$$= -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n\pi} \quad (n = 1,2,\cdots).$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件，其间断点为 $x = 2k, 2k + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}$，故有

$$f(x) = -\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2} + \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\cos n\pi x + \frac{1}{n\pi}\left(1 - 2\cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin n\pi x\right\},$$
$$x \in \mathbf{R}\backslash\{2k, 2k + \frac{1}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

(3) 函数 $f(x)$ 的半周期 $l = 3$.

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x+1)\mathrm{d}x + \int_{0}^{3}\mathrm{d}x\right] = -1;$$
$$a_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x+1)\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x + \int_{0}^{3}\cos\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x\right]$$
$$= \frac{6}{n^2\pi^2}[1 - (-1)^n] \quad (n = 1,2,\cdots);$$
$$b_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(2x+1)\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x + \int_{0}^{3}\sin\frac{n\pi x}{3}\mathrm{d}x\right]$$
$$= \frac{6}{n\pi}(-1)^{n+1} \quad (n = 1,2,\cdots).$$

因 $f(x)$ 满足收敛定理的条件，其间断点为 $x = 3(2k+1), k \in \mathbf{Z}$，故有

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{6}{n^2\pi^2}[1 - (-1)^n]\cos\frac{n\pi x}{3} + (-1)^{n+1}\frac{6}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right\},$$
$$x \in \mathbf{R}\backslash\{3(2k+1) \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

2. 将下列函数分别展开成正弦级数和余弦级数：

(1) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < \frac{l}{2}, \\ l - x, & \frac{l}{2} \leqslant x \leqslant l; \end{cases}$

(2) $f(x) = x^2 \quad (0 \leqslant x \leqslant 2)$.

解 (1) 展开为正弦级数：

将 $f(x)$ 作奇延拓得 $\varphi(x)$，又将 $\varphi(x)$ 作周期延拓得 $\Phi(x)$，则 $\Phi(x)$ 是以 $2l$ 为周期的奇函数，$\Phi(x)$ 处处连续，又满足收敛定理的条件，且在 $[0, l]$ 上，$\Phi(x) \equiv f(x)$.

$$a_n = 0 \quad (n = 0,1,2,\cdots);$$

$$b_n = \frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{n\pi x}{l}dx + \int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right],$$

在上式第二个积分中令 $l-x=t$,则有

$$\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = -\int_0^{\frac{l}{2}} t\cdot\cos n\pi\sin\frac{n\pi t}{l}dt = (-1)^{n-1}\int_0^{\frac{l}{2}} t\sin\frac{n\pi t}{l}dt,$$

于是

$$b_n = \frac{2}{l}[1+(-1)^{n-1}]\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

当 $n=2k$ 时，$b_{2k}=0$;当 $n=2k-1$ 时，

$$b_{2k-1} = \frac{4}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{(2k-1)\pi x}{l}dx = \frac{4l}{(2k-1)^2\pi^2}(-1)^{k-1} \quad (k=1,2,\cdots).$$

故

$$f(x) = \frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{l}, x\in[0,l].$$

展开为余弦级数:

将 $f(x)$ 作偶延拓得 $\psi(x)$,再将 $\psi(x)$ 作周期延拓得 $\Psi(x)$,则 $\Psi(x)$ 是以 $2l$ 为周期的周期函数. $\Psi(x)$ 处处连续又满足收敛定理的条件，且在 $[0,l]$ 上 $\Psi(x)\equiv f(x)$.

$$a_0 = \frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} x dx + \int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)dx\right] = \frac{l}{2};$$

$$a_n = \frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} x\cos\frac{n\pi x}{l}dx + \int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\right],$$

在上式第二个积分中令 $l-x=t$, 则有

$$\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = (-1)^n\int_0^{\frac{l}{2}} t\cos\frac{n\pi t}{l}dt,$$

于是

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l}[1+(-1)^n]\int_0^{\frac{l}{2}} x\cos\frac{n\pi x}{l}dx \\ &= \frac{2}{l}[1+(-1)^n]\left(\frac{l}{\pi}\right)^2\left[\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2}\right]. \end{aligned}$$

当 $n=2m-1$ 时，$a_{2m-1}=0$;当 $n=2m$ 时，

$$\begin{aligned} a_{2m} &= \frac{4l}{\pi^2}\cdot\frac{l}{(2m)^2}[(-1)^m-1] \\ &= \begin{cases} 0, & m=2k, \\ \dfrac{l}{\pi^2}\cdot\dfrac{(-2)}{(2k-1)^2}, & m=2k-1 \end{cases} \quad (k=1,2,\cdots). \end{aligned}$$

故

$$f(x)=\frac{l}{4}-\frac{2l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{2(2k-1)\pi x}{l},x\in[0,l].$$

(2) 展开为正弦级数：

将 $f(x)$ 作奇延拓得 $\varphi(x)$，再将 $\varphi(x)$ 作周期延拓，得以 4 为周期的周期函数 $\Phi(x)$，则 $\Phi(x)$ 满足收敛定理的条件，除了间断点 $x=2(2k+1)(k\in\mathbf{Z})$ 外处处连续，且在[0,2) 上，$\Phi(x)\equiv f(x)$.

$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\left[-\frac{2}{n\pi}x^2\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2+\frac{4}{n\pi}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{8}{n\pi}+\frac{8}{(n\pi)^2}\left[x\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2+\frac{16}{(n\pi)^3}\left[\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{8}{n\pi}+\frac{16}{(n\pi)^3}[(-1)^n-1](n=1,2,\cdots).$$

故

$$f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{n^3\pi^2}[(-1)^n-1]\right\}\sin\frac{n\pi x}{2},x\in[0,2).$$

展开为余弦级数：

将 $f(x)$ 作偶延拓得 $\psi(x)$，再将 $\psi(x)$ 作周期延拓，得以 4 为周期的周期函数 $\Psi(x)$，则 $\Psi(x)$ 处处连续又满足收敛定理的条件．且在[0,2] 上 $\Psi(x)\equiv f(x)$.

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{3};$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x^2\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\left[x^2\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2-\frac{4}{n\pi}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{8}{(n\pi)^2}\left[x\cos\frac{n\pi x}{2}-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$=(-1)^n\frac{16}{(n\pi)^2}\quad(n=1,2,\cdots);$$

$$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots).$$

故

$$f(x)=\frac{4}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2},x\in[0,2].$$

*3. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，它在[−1,1) 上的表达式为 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$. 试将 $f(x)$ 展开成复数形式的傅里叶级数.

解　$f(x)$ 满足收敛定理的条件，且除了点 $x=2k+1(k\in\mathbf{Z})$ 外处处连续.

$$c_n=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-in\pi x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-(1+n\pi i)x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+n\pi i}\left[\mathrm{e}^{-(1+n\pi i)x}\right]_{-1}^{1}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-n\pi\mathrm{i}}{1+(n\pi)^2}(\mathrm{e}^{-1}\cdot\mathrm{e}^{-n\pi\mathrm{i}}-\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{n\pi\mathrm{i}})$$

$$=\frac{1-n\pi\mathrm{i}}{1+(n\pi)^2}\,\frac{\mathrm{e}\cos n\pi-\mathrm{e}^{-1}\cos n\pi}{2}$$

$$=(-1)^n\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{2}\,\frac{1-n\pi\mathrm{i}}{1+n^2\pi^2}\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

故

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{2}\,\frac{1-n\pi\mathrm{i}}{1+n^2\pi^2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x},x\in\mathbf{R}\backslash\{2k+1\mid k\in\boldsymbol{Z}\}.$$

*4. 设 $u(t)$ 是周期为 T 的周期函数．已知它的傅里叶级数的复数形式为(参阅本节例题)

$$u(t)=\frac{h\tau}{T}+\frac{h}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq0}}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2n\pi t}{T}}\quad(-\infty<t<+\infty),$$

试写出 $u(t)$ 的傅里叶级数的实数形式(即三角形式)．

解　由题设知　　$c_n=\frac{h}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\quad(n=\pm1,\pm2,\cdots).$

因

$$c_n=\frac{a_n-\mathrm{i}b_n}{2},c_{-n}=\frac{a_n+\mathrm{i}b_n}{2}=\overline{c_n}\quad(n=1,2,\cdots),$$

可见　　$a_n=\mathrm{Re}(2\,\overline{c_n}),b_n=\mathrm{Im}(2\,\overline{c_n}).$

而 c_n 为实数，故

$$a_n=\frac{2h}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T},b_n=0\quad(n=1,2,\cdots),$$

故

$$u(t)=\frac{h\tau}{T}+\frac{2h}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\cdot\cos\frac{2n\pi t}{T}\quad(-\infty<t<+\infty).$$

总习题十二

1．填空

(1) 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\lim_{n\to\infty}u_n=0$ 是它收敛的________条件，不是它收敛的________条件；

(2) 部分和数列 $\{S_n\}$ 有界是正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的________条件；

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必定________；若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件

收敛,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$必定________.

解 (1) 必要,充分; (2) 充要; (3) 收敛,发散.

2. 判定下列级数的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2n^2}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$;

(4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^{10} n}$; (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^s}(a>0,s>0)$.

解 (1) $u_n=\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$,因$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$. 而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,故由极限形式的比较审敛法知原级数发散.

(2) $u_n=\frac{(n!)^2}{2n^2}=\frac{[(n-1)!]^2}{2}\to+\infty(n\to\infty)$,由于一般项不趋于零,故级数发散.

(3) $u_n=\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}\leqslant\frac{n}{2^n}=v_n$,而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$是收敛的(事实上,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1$,据比值审敛法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$收敛),故由比较审敛法知原级数收敛.

(4) $u_n=\frac{1}{\ln^{10}n}$,因$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\ln^{10}n}=+\infty$,而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,故由极限形式的比较审敛法知原级数发散.

注 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\ln^{10}n}$时,可考虑极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln^{10}n}{n}$.

因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^{10}x}{x}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{10\ln^9 x}{x}=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{10!}{x}=0$,

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^{10}n}{n}=0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln^{10}n}=+\infty.$$

(5) $u_n=\frac{a^n}{n^s}$,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a\left(\frac{n}{n+1}\right)^s=a$.

由比值审敛法知,当$a<1$时级数收敛,当$a>1$时级数发散.

当 $a=1$ 时,原级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$,由 $p-$级数的结论知,当 $s>1$ 时级数收敛,当 $s\leqslant 1$ 时级数发散.

3. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛,证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 也收敛.

证 根据题设条件知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛,故有 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)=0$. 由极限定义知,存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,有 $u_n+v_n<1$,从而

$$(u_n+v_n)^2<u_n+v_n(n\geqslant N),$$

故由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛.

4. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=1$. 问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 是否也收敛?试说明理由.

解 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 不一定收敛.

当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是正项级数时,在题设条件下 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 必定收敛. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=1$. 根据收敛数列的保号性知,存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时有 $\frac{v_n}{u_n}>0$,即有 $v_n>0$. 于是,按正项级数的比较审敛法知 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}v_n$ 收敛,即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛.

当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 不是正项级数时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 可能不收敛. 例如:若 $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$,$v_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right]=1$,然而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

5. 讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\pi^{n+1}}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$.

解 (1) $u_n=\frac{(-1)^n}{n^p}$,$|u_n|=\frac{1}{n^p}$,当 $p>1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛;当 $0<p\leqslant 1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 是交错级数,且满足莱布尼茨定理的条件,因而收敛且为条件收敛;当 $p\leqslant 0$ 时,由于 $u_n\not\to 0(n\to\infty)$,此时级数发散. 综上可知,当 $p>1$ 时,级数绝对收敛,当 $0<p\leqslant 1$ 时,级数条件收敛,当 $p\leqslant 0$ 时,级数发散.

(2) $u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi^{n+1}}\sin\frac{\pi}{n+1}$，$|u_n|\leqslant\left(\frac{1}{\pi}\right)^{n+1}$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{n+1}$收敛，由比较审敛法知$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，即原级数绝对收敛.

(3) $u_n=(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$，

$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，由极限形式的比较审敛法知$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散.

而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$是交错级数且满足莱布尼茨定理的条件，因而收敛，故该级数条件收敛.

(4) $u_n=(-1)^n\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{1}{e}<1.\end{aligned}$$

由比值审敛法知$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，即原级数绝对收敛.

6. 求下列极限：

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$；　　(2) $\lim_{n\to\infty}[2^{\frac{1}{3}}\cdot4^{\frac{1}{9}}\cdot8^{\frac{1}{27}}\cdot\cdots\cdot(2^n)^{\frac{1}{3^n}}]$.

解　(1) 由于$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$是级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$的部分和，注意到

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e,$$

故

$$\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}<\frac{1}{3^n}e^n=\left(\frac{e}{3}\right)^n.$$

因$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^n$收敛，故由比较审敛法知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$收敛，于是部分和$s_n$有界，从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{n}=0.$$

(2) $2^{\frac{1}{3}}\cdot4^{\frac{1}{9}}\cdot8^{\frac{1}{27}}\cdot\cdots\cdot(2^n)^{\frac{1}{3^n}}=2^{\frac{1}{3}}\cdot2^{\frac{2}{9}}\cdot2^{\frac{3}{27}}\cdot\cdots\cdot2^{\frac{n}{3^n}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\cdots+\frac{n}{3^n}}$，

为此，先求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\cdots+\frac{n}{3^n}\right)$.

记

$$s_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^n},$$

则

$$\frac{1}{3}s_n=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{3^4}+\cdots+\frac{n-1}{3^n}+\frac{n}{3^{n+1}},$$

将以上两式相减，得

$$\frac{2}{3}s_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{n}{3^n},$$

即

$$s_n=\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{3^n},$$

故 $$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}-0=\frac{3}{4}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdot 8^{\frac{1}{27}}\cdot\cdots\cdot(2^n)^{\frac{1}{3^n}}=2^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{8}.$$

7. 求下列幂级数的收敛区间：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+5^n}{n}x^n$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x+1)^n$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n}$.

解　(1) $u_n=a_nx^n,a_n=\frac{3^n+5^n}{n}$. 因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{3^{n+1}+5^{n+1}}{3^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{3\left(\frac{3}{5}\right)^n+5}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}=5,$$

故收敛半径为$R=\frac{1}{5}$，收敛区间为$\left(-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$.

(2) $u_n=a_nx^n,a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. 因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{(n+1)^2}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n+1}}{\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n^2}}=\frac{e^2}{e}=e,$$

故收敛半径为 $R=\frac{1}{e}$,收敛区间为$\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$.

(3) 令 $x+1=t$,即 $x=t-1$,先讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nt^n$ 的收敛区间.

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$,故收敛半径 $R=1$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nt^n$ 的收敛区间为 $(-1,1)$,从而原级数的收敛区间为$(-2,0)$.

(4) 令$\frac{x^2}{2}=t$,原级数成为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nt^n$,由第(3)题知该级数的收敛区间为 $(-1,1)$. 因 $x=\pm\sqrt{2t}$,故原级数的收敛区间为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

8. 求下列幂级数的和函数:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$; *(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$; *(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

解 (1) $u_n(x)=\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}\cdot\frac{|x|^2}{2}=\frac{|x|^2}{2}.$$

当$\frac{|x|^2}{2}<1$时,原级数收敛;当$\frac{|x|^2}{2}\geqslant 1$时,因级数的一般项 $u_n(x)\not\to 0(u\to\infty)$,故级数发散. 因此原级数的收敛域为$\frac{|x|^2}{2}<1$,即$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

设和函数为 $s(x)$,即 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$,从 0 到 x 积分并逐项积分:

$$\int_0^x s(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^{2n+1}=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n$$

$$=\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}}=\frac{x}{2-x^2},x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

上式两端对 x 求导,得

$$s(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

*(2) $u_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}|x|^2=|x|^2.$$

当$|x|<1$时,级数收敛;当$|x|>1$时,因级数一般项 $u_n(x)\not\to 0(n\to\infty)$,

故级数发散；当 $x=\pm 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n-1}$ 是收敛的交错级数，因此原级数的收敛域为 $[-1,1]$. 设和函数为 $s(x)$，则

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\text{，且 } s(0)=0.$$

在 $(-1,1)$ 内，上式两端对 x 求导，得

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^{n}=\frac{1}{1+x^2}.$$

于是

$$s(x)=s(x)-s(0)=\int_0^x s'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x.$$

又由于幂级数在 $x=\pm 1$ 处收敛，且 $\arctan x$ 在 $x=\pm 1$ 处连续，故

$$s(x)=\arctan x,\quad x\in[-1,1].$$

(3) 令 $x-1=t$，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nt^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$. 记其和函数为 $\varphi(t)$，即有

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=\sum_{n=1}^{\infty}nt^n=t\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}=t\Big(\sum_{n=1}^{\infty}t^n\Big)'\\&=t\left(\frac{t}{1-t}\right)'=\frac{t}{(1-t)^2},t\in(-1,1).\end{aligned}$$

于是原级数的和函数

$$s(x)=\varphi(x-1)=\frac{x-1}{(2-x)^2},x\in(0,2).$$

* (4) $u_n(x)=a_nx^n,a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+2}=1$，得幂级数的收敛半径 $R=1$. 当 $x=\pm 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$ 均收敛，故幂级数的收敛域为 $[-1,1]$.

设和函数为 $s(x)$，即 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$.

当 $x=0$ 时，$s(0)=0$；

当 $0<|x|<1$ 时，

$$xs(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)},$$

上式两端对 x 求导，得

$$[xs(x)]'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},$$

再求导,得

$$[xs(x)]'' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

注意到 $[xs(x)]'_{x=0} = 0$,上式两端从 0 到 x 积分,得

$$[xs(x)]' = \int_0^x \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x),$$

再积分,得

$$xs(x) = -\int_0^x \ln(1-x)dx = (1-x)\ln(1-x) + x,$$

于是

$$s(x) = \frac{1-x}{x}\ln(1-x) + 1, x \in (-1,0) \cup (0,1).$$

由于幂级数在 $x=\pm1$ 处收敛,故和函数分别在 $x=\pm1$ 处左连续与右连续,于是 $s(1) = \lim\limits_{x\to1^-} s(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{1-x}{x}\ln(1-x) + 1 = 1.$

因此

$$s(x) = \begin{cases} 1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right)\ln(1-x), & x \in [-1,0) \cup (0,1), \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

9. 求下列数项级数的和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$;　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!}$.

解　(1) 利用 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, x \in (-\infty, +\infty)$,取 $x=1$,有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

又

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

其中

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2e.$$

(2) 因 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sin x, \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos x, x \in (-\infty, +\infty)$,

故取 $x=1$,有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} = \sin 1, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} = \cos 1.$$

于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+2}{(2n+1)!}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 1+\sin 1).$$

10. 将下列函数展开成 x 的幂级数：

(1) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；　　　(2) $\frac{1}{(2-x)^2}$.

解 (1) 因 $$[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

而

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},x\in[-1,1],$$

故

$$\ln(x+\sqrt{x^2+1})=\int_0^x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\right]\mathrm{d}x$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1},x\in[-1,1].$$

(2) 因 $$\frac{1}{(2-x)^2}=\left(\frac{1}{2-x}\right)',x\neq 2.$$

而 $$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^n,x\in(-2,2).$$

故 $$\frac{1}{(2-x)^2}=\left(\frac{1}{2-x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^n\right)'=\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^n\right)'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}x^{n-1},x\in(-2,2).$$

11. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-\pi,0),\\ e^x, & x\in[0,\pi).\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数．

解　$f(x)$ 满足收敛定理的条件，且除了 $x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 外处处连续．

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{\pi};$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}\mathrm{e}^x\\&=\frac{1}{\pi}\left(\mathrm{e}^x\cos nx\Big|_0^{\pi}+n\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\sin nx\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi}-1}{\pi}+\frac{n}{\pi}\left(\mathrm{e}^x\sin nx\Big|_0^{\pi}-n\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos nx\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi}-1}{\pi}-n^2a_n,\end{aligned}$$

故

$$a_n=\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi}-1}{(n^2+1)\pi}\qquad(n=1,2,\cdots);$$

而

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}\mathrm{e}^x\\&=\frac{1}{\pi}\left(\mathrm{e}^x\sin nx\Big|_0^{\pi}-n\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos nx\mathrm{d}x\right)=-na_n\quad(n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

于是

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi}-1}{n^2+1}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}\mathrm{e}^{\pi}+1}{n^2+1}n\sin nx\right],$$
$$x\in\mathbf{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbf{Z}\}.$$

12. 将函数

$$f(x)=\begin{cases}1,&0\leqslant x\leqslant h,\\0,&h<x\leqslant\pi\end{cases}$$

分别展开成正弦级数和余弦级数．

解　(1) 展开成正弦级数：

将 $f(x)$ 作奇延拓，得 $\varphi(x)=\begin{cases}f(x),&x\in(0,\pi],\\0,&x=0,\\-f(-x),&x\in(-\pi,0),\end{cases}$ 再将 $\varphi(x)$ 作周期延拓，得 $\Phi(x)$，则 $\Phi(x)$ 满足收敛定理的条件，且在 $(0,\pi]$ 上 $\Phi(x)\equiv f(x)$，并有间断点 $x=0,x=h$．

$a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$；

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{h}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2(1-\cos nh)}{n\pi}(n=1,2,\cdots).$$

故

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos nh}{n}\sin nx, x\in(0,h)\cup(h,\pi].$$

(2) 展开成余弦级数：

将 $f(x)$ 作偶延拓，得 $\psi(x)=\begin{cases}f(x), & x\in[0,\pi]\\ f(-x), & x\in(-\pi,0]\end{cases}$，再将 $\psi(x)$ 作周期延拓得 $\Psi(x)$，则 $\Psi(x)$ 满足收敛定理的条件，在$[0,\pi]$上 $\Psi(x)\equiv f(x)$，且有间断点 $x=h$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^h dx=\frac{2h}{\pi};$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^h\cos nx\,dx=\frac{2\sin nh}{n\pi}(n=1,2,\cdots);$$

$$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots).$$

故

$$f(x)=\frac{h}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{n}\cos nx, x\in[0,h)\cup(h,\pi].$$

二、

全国硕士研究生入学统一考试数学试题选解

（五）向量代数与空间解析几何

1. （1987. Ⅰ，Ⅱ）与两直线$\begin{cases} x = 1, \\ y = -1 + t, \\ z = 2 + t \end{cases}$及$\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{1}$都平行，且过原点的平面方程为________.

解 两已知直线的方向向量分别为$\boldsymbol{s}_1=(1,2,1)$和$\boldsymbol{s}_2=(0,1,1)$，所求平面的法向量$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{s}_1$和$\boldsymbol{s}_2$均垂直，故取$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=(1,-1,1)$. 又平面过原点，故平面方程为$x-y+z=0$.

2. （1990. Ⅰ，Ⅱ）过点$M(1,2,-1)$且与直线$\begin{cases} x=-t+2, \\ y=3t-4, \\ z=t-1 \end{cases}$垂直的平面方程是________.

解 已知直线的方向向量$\boldsymbol{s}=(-1,3,1)$，所求平面的法向量$\boldsymbol{n}\,/\!/\,\boldsymbol{s}$，故可取$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}$. 于是平面的点法式方程为$-1(x-1)+3(y-2)+(z+1)=0$，即$x-3y-z+4=0$.

3. （1991. Ⅰ，Ⅱ）已知两条直线的方程是

$$L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1},\ L_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1},$$

则过L_1且平行于L_2的平面方程是________.

解 两已知直线的方向向量分别是$\boldsymbol{s}_1=(1,0,-1)$和$\boldsymbol{s}_2=(2,1,1)$. 所求平面的法向量$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{s}_1$和$\boldsymbol{s}_2$都垂直，故可取$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=(1,-3,1)$. 又平面过$L_1$上的一点$(1,2,3)$，故所求平面的点法式方程为

$$(x-1)-3(y-2)+(z-3)=0,\text{即}\quad x-3y+z+2=0.$$

4. （1995. Ⅰ，Ⅱ）设$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$，则$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=$________.

解
$$\begin{aligned}&[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\\ =&(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\\ =&(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}\\ =&(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=4.\end{aligned}$$

5. （1996. Ⅰ，Ⅱ）设一平面经过原点及点$(6,-3,2)$，且与平面$4x-y+$

$2z=8$ 垂直,则此平面方程为________.

解 平面 $4x-y+2z=8$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 为 $(4,-1,2)$,过原点和点 $(6,-3,2)$ 的直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 为 $(6,-3,2)$. 按题设,所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_1$ 且 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}$,故可取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{s}=(4,4,-6)$. 于是得平面的方程为 $4x+4y-6z=0$,或 $2x+2y-3z=0$.

6. (2006. Ⅰ)点 $(2,1,0)$ 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离 $d=$________.

解 由点到平面的距离公式,

$$d=\frac{|3\cdot2+4\cdot1+5\cdot0|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}=\sqrt{2}.$$

7. (1993. Ⅰ,Ⅱ)设有直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与 $L_2:\begin{cases}x-y=6,\\2y+z=3,\end{cases}$ 则 L_1 与 L_2 的夹角为( ).

(A) $\dfrac{\pi}{6}$. (B) $\dfrac{\pi}{4}$.

(C) $\dfrac{\pi}{3}$. (D) $\dfrac{\pi}{2}$.

解 L_1 和 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(1,-2,1)$ 和 $\boldsymbol{s}_2=(1,-1,0)\times(0,2,1)=(-1,-1,2)$,$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}=\dfrac{1}{2}$,故 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$. 应选(C).

8. (1995. Ⅰ,Ⅱ)设有直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0,\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面 π: $4x-2y+z-2=0$,则直线 L( ).

(A) 平行于 π. (B) 在 π 上.

(C) 垂直于 π. (D) 与 π 斜交.

解 直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}=(1,3,2)\times(2,-1,-10)=(-28,14,-7)\,/\!/\,(4,-2,1)$,而 $(4,-2,1)$ 为平面 π 的法向量,故直线 L 垂直于 π. 应选(C).

9. (1998. Ⅰ)设矩阵 $\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}$ 是满秩的,则直线 $\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_1-b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线 $\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$( ).

(A) 相交于一点. (B) 重合;

(C) 平行但不重合. (D) 异面.

解 记点 M 为 (a_3,b_3,c_3),点 N 为 (a_1,b_1,c_1). 两已知直线的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(a_1-a_2,b_1-b_2,c_1-c_2)$,$\boldsymbol{s}_2=(a_2-a_3,b_2-b_3,c_2-c_3)$. 由于

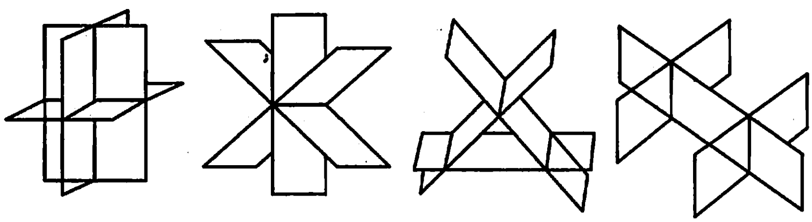
$$\begin{vmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{vmatrix}=0,$$

故三向量 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\overrightarrow{MN}$ 共面. 又由于矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 是满秩的,故

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0,$$

因此$\dfrac{a_1-a_2}{a_2-a_3}=\dfrac{b_1-b_2}{b_2-b_3}=\dfrac{c_1-c_2}{c_2-c_3}$不成立,从而 $\boldsymbol{s}_1$ 与 $\boldsymbol{s}_2$ 不平行,于是两直线必交于一点. 应选(A).

10. (2002. Ⅰ)设有三张不同平面的方程 $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i, i=1,2,3$,它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为 2,则这三张平面可能的位置关系为(　　).



(A)　(B)　(C)　(D)

图研 5-1

解　由于线性方程组系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩,且小于未知数的个数 3,故线性方程组有无穷多个解,因此三张平面不可能没有公共交点,也不可能仅交于一点,这样就排除了 C、D 和 A. 又由于系数矩阵的秩为 2,故必有两张平面的法向量线性无关,即不共线,因此三平面必交于一线. 应选(B).

11. (1998. Ⅰ)求直线 $l:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 l_0 的方程,并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

解法一　直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{s}=(1,1,-1)$,平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$. 设经过 l 且垂直于平面 π 的平面方程为 $\pi_1: A(x-1)+By+C(z-1)=0$. 则由题设,$\pi_1$ 的法向量 (A,B,C) 与 $\boldsymbol{s}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 均垂直,从而有

$$A+B-C=0,\ A-B+2C=0,$$

由此解得 $A:B:C=(-1):3:2$. 于是得 π_1 的方程为 $x-3y-2z+1=0$.

从而得 l_0 的方程为

$$\begin{cases}x-y+2z-1=0,\\ x-3y-2z+1=0,\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}x=2y,\\ z=-\dfrac{1}{2}(y-1).\end{cases}$$

设 l_0 绕 y 轴旋转一周所得的旋转曲面为 S，(x,y,z) 为 S 上任意一点. 则该点由直线 l_0 上的一点 (x_0,y_0,z_0) 绕 y 轴旋转而得，于是有关系：$y=y_0$，

$$x^2+z^2=x_0^2+z_0^2=(2y_0)^2+\left[-\frac{1}{2}(y_0-1)\right]^2=4y^2+\frac{1}{4}(y-1)^2,$$

从而得 S 的方程为

$$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0.$$

解法二 将直线 l 的方程改写为一般方程：$\begin{cases}x-y-1=0,\\ y+z-1=0.\end{cases}$ 过 l 的平面束方程为

$$(x-y-1)+\lambda(y+z-1)=0,$$

即
$$x+(\lambda-1)y+\lambda z-(1+\lambda)=0.$$

现确定 λ 的值，使向量 $(1,\lambda-1,\lambda)$ 与平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$ 垂直，即令 $1-(\lambda-1)+2\lambda=0$，解得 $\lambda=-2$. 从而得过 l 且垂直于 π 的平面方程为 $x-3y-2z+1=0$.（下同解法一）

解法三 经过 l 且垂直于平面 π 的平面 π_1 的法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 可取为 $(1,1,-1)\times(1,-1,2)=(1,-3,-2)$. 又 π_1 通过 l 上的点 $(1,0,1)$，故 π_1 的方程为

$$(x-1)-3y-2(z-1)=0\text{，即}\quad x-3y-2z+1=0.$$

（下同解法一）

（六）多元函数微分学

1. （1997. Ⅰ）二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点$(0,0)$处（　　）.

(A) 连续、偏导数存在．　　(B) 连续、偏导数不存在．

(C) 不连续、偏导数存在．　　(D) 不连续、偏导数不存在．

解　$f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$，同理，$f_y(0,0)=0$，故偏导数存在．又当$(x,y)$沿 $y=kx$ 趋向于$(0,0)$时

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+(kx)^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

随着 k 的不同，该极限值也不同，所以极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在，$f(x,y)$ 在$(0,0)$不连续．应选(C).

2. （1991. Ⅰ，Ⅱ）由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点$(1,0,-1)$处的全微分 $\mathrm{d}z=$ ________.

解　在所给方程两端分别取全微分，得

$$yz\,\mathrm{d}x+xz\,\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}z+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z)=0,$$

因此，在点$(1,0,-1)$处 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}x-\sqrt{2}\mathrm{d}y$.

3. （1987. Ⅱ）设 $z=f(u,x,y)$，$u=xe^y$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_u\frac{\partial u}{\partial x}+f_x=f_u\cdot e^y+f_x,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}(f_u\cdot e^y+f_x)=\left(f_{uu}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f_{uy}\right)e^y+f_u\cdot e^y+f_{xu}\frac{\partial u}{\partial y}+f_{xy}\\&=f_{uu}\cdot xe^{2y}+f_{uy}\cdot e^y+f_u\cdot e^y+f_{xu}\cdot xe^y+f_{xy}.\end{aligned}$$

4. （1995. Ⅰ，Ⅱ）设 $u=f(x,y,z)$，$\varphi(x^2,e^y,z)=0$，$y=\sin x$，其中 f,φ 都具有一阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解　$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$. 易见$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cos x$. 由

$$2x\varphi_1'+\mathrm{e}^y\cos x\cdot\varphi_2'+\varphi_3'\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,$$

得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{\varphi_3'}(2x\varphi_1'+\mathrm{e}^y\cos x\cdot\varphi_2'),$$

故

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cos x-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{1}{\varphi_3'}(2x\varphi_1'+\mathrm{e}^{\sin x}\cos x\cdot\varphi_2').$$

5. (1996. Ⅰ,Ⅱ)设变换$\begin{cases}u=x-2y,\\ v=x+ay\end{cases}$可把方程

$$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

简化为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$,求常数$a$.

解法一　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-2\dfrac{\partial z}{\partial u}+a\dfrac{\partial z}{\partial v},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

将上述结果代入原方程,经整理后得

$$(10+5a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.$$

依题意a应满足

$$6+a-a^2=0\quad 且\quad 10+5a\neq 0,$$

解之得$a=3$.

解法二　将z视为以x,y为中间变量的u,v的二元复合函数,由题设可解得

$$x=\frac{au+2v}{a+2},\ y=\frac{-u+v}{a+2}.$$

从而　$\dfrac{\partial x}{\partial u}=\dfrac{a}{a+2},\dfrac{\partial x}{\partial v}=\dfrac{2}{a+2},\dfrac{\partial y}{\partial u}=-\dfrac{1}{a+2},\dfrac{\partial y}{\partial v}=\dfrac{1}{a+2},$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{a}{a+2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{a+2}\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}&=\frac{a}{a+2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)-\frac{1}{a+2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\\&=\frac{2a}{(a+2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{a-2}{(a+2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{1}{(a+2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

依题意 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$,即 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

代人前式,得 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{2a-6}{(a+2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{a-3}{(a+2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

令 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$,得 $a-3=0,a+2\neq 0$,故 $a=3$.

6. (1999. Ⅰ) 设 $y=y(x),z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数,其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数,求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解 分别在 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 的两端对 x 求导或求偏导,得

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f+x\left(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)f',\\ F_x+F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0.\end{cases}$$

整理后得

$$\begin{cases}-xf'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f+xf',\\ F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-F_x.\end{cases}$$

由此解得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{(f+xf')F_y-xf'F_x}{F_y+xf'F_z}(F_y+xf'F_z\neq 0).$$

7. (2000. Ⅰ)设 $z=f\left(xy,\frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)$,其中 f 具有二阶连续偏导数,g 具有二阶连续导数,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+\frac{1}{y}f_2'-\frac{y}{x^2}g'$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(yf_1'+\frac{1}{y}f_2'-\frac{y}{x^2}g'\right)\\ &=f_1'+y\left(xf_{11}''-\frac{x}{y^2}f_{12}''\right)-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}\left(xf_{21}''-\frac{x}{y^2}f_{22}''\right)-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''\\ &=f_1'-\frac{1}{y^2}f_2'+xyf_{11}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''.\end{aligned}$$

8. (2001. Ⅰ)设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微,且 $f(1,1)=1$, $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2,\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3,\varphi(x)=f(x,f(x,x))$. 求 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$.

解 $\varphi(1)=f(1,f(1,1))=f(1,1)=1$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\bigg|_{x=1}=\left[3\varphi^2(x)\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\right]\bigg|_{x=1}=3\varphi^2(x)[f_1'(x,f(x,x))+f_2'(x,f(x,x))(f_1'(x,x)+f_2'(x,x))]|_{x=1}$$
$$=3\cdot1\cdot[2+3(2+3)]=51.$$

9. (2005. Ⅰ,Ⅱ)设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t$,其中函数 φ 具有二阶导数,ψ 具有一阶导数,则必有(　　).

(A) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(B) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(D) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

解
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi''(x+y)-\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)+\psi'(x-y),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y).$$

由此可知
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$
故应选(B).

10. (2005. Ⅲ,Ⅳ)设 $f(u)$ 具有二阶连续导数,且 $g(x,y)=f\left(\dfrac{y}{x}\right)+yf\left(\dfrac{x}{y}\right)$,　求　$x^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

解　由已知条件可得
$$\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right)+f'\left(\frac{x}{y}\right),$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^4}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right),$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+f\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right),$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x^2}{y^3}f''\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{y^3}f''\left(\frac{x}{y}\right),$$

所以

$$x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{2y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y^2}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{x^2}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$=\frac{2y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right).$$

11. (1992. Ⅰ,Ⅱ)在曲线 $x=t,y=-t^2,z=t^3$ 的所有切线中,与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线(　　).

(A) 只有 1 条.　　(B) 只有 2 条.

(C) 至少有 3 条.　　(D) 不存在.

解 曲线在对应于参数 t_0 的点处的切线的方向向量为 $\boldsymbol{T}=(1,-2t_0,3t_0^2)$,该切线与平面平行 $\Leftrightarrow \boldsymbol{T}$ 与该平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,1)$ 垂直 $\Leftrightarrow \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}=0\Leftrightarrow 1-4t_0+3t_0^2=1\Leftrightarrow t_0=1$ 或 $t_0=\frac{1}{3}$,故选(B).

12. (2003. Ⅰ)曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面的方程是________.

解 曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面方程为

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

利用 $z_0=x_0^2+y_0^2$,　得

$$2x_0x+2y_0y-z-z_0=0.$$

由题设可知,

$$\frac{2x_0}{2}=\frac{2y_0}{4}=\frac{-1}{-1},$$

故 $x_0=1,y_0=2,z_0=x_0^2+y_0^2=5$,所求切平面方程是 $2x+4y-z=5$.

13. (1988. Ⅱ)求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上某点 M 处的切平面 π 的方程,使 π 过已知直线 $L:\frac{x-6}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{2z-1}{-2}$.

解 设 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$,则

$$F_x=2x,\ F_y=4y,\ F_z=6z.$$

椭球面在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面 π 的方程为

$$2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0,$$

即

$$x_0x+2y_0y+3z_0z=21.$$

因为平面 π 过直线 L,故 L 上任意两点,比如 $A\left(6,3,\frac{1}{2}\right)$,$B\left(0,0,\frac{7}{2}\right)$ 应满足 π 的方程,代入有

$$6x_0 + 6y_0 + \frac{3}{2}z_0 = 21, \tag{1}$$

$$z_0 = 2. \tag{2}$$

又因为 (x_0, y_0, z_0) 在椭球面上，有

$$x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 21. \tag{3}$$

解(1),(2),(3)，得 $x_0 = 3, y_0 = 0, z_0 = 2$ 及 $x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = 2$.

故所求切平面方程为

$$x + 2z = 7 \qquad 和 \qquad x + 4y + 6z = 21.$$

14. (1997. Ⅰ)设直线 $l: \begin{cases} x + y + b = 0, \\ x + ay - z - 3 = 0 \end{cases}$ 在平面 Π 上，而平面 Π 与曲面：$z = x^2 + y^2$ 相切于点 $(1, -2, 5)$，求 a, b 之值.

解法一 曲面在点 $(1, -2, 5)$ 处的一个法向量 $\boldsymbol{n} = (2, -4, -1)$，故曲面的切平面即平面 Π 的方程为

$$2(x - 1) - 4(y + 2) - (z - 5) = 0,$$

即

$$2x - 4y - z - 5 = 0.$$

再由 $l: \begin{cases} x + y + b = 0, \\ x + ay - z - 3 = 0 \end{cases}$ 可得 $y = -(x + b)$, $z = x - a(x + b) - 3$，代入平面 Π 的方程，得 $2x + 4(x + b) - x + a(x + b) + 3 - 5 = 0$,

因而有 $5 + a = 0,\ 4b + ab - 2 = 0.$

由此方程组解得 $a = -5, b = -2.$

解法二 过 l 的平面方程设为 $x + ay - z - 3 + \lambda(x + y + b) = 0$，即

$$(1 + \lambda)x + (a + \lambda)y - z - 3 + \lambda b = 0.$$

曲面 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(1, -2, 5)$ 处的一个法向量 $\boldsymbol{n} = (2, -4, -1)$，故由题设知

$$\frac{1 + \lambda}{2} = \frac{a + \lambda}{-4} = \frac{-1}{-1},$$

解得 $\lambda = 1, a = -5.$

又点 $(1, -2, 5)$ 在平面 Π 上，故 $(1 + \lambda) - 2(a + \lambda) - 8 + \lambda b = 0.$

将 $\lambda = 1, a = -5$ 代入，解得 $b = -2$. 因此 $a = -5, b = -2.$

15. (1993. Ⅰ, Ⅱ)由曲线 $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 12, \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点 $(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为________.

解 给定曲线绕 y 轴旋转一周得到的旋转面方程为 $3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 12 = 0$，此旋转面在点 $(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ 处指向外侧的单位法向量为

$$\boldsymbol{e}_n = \frac{1}{|\boldsymbol{n}|}(6x, 4y, 6z)\bigg|_{(0,\sqrt{3},\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, \sqrt{2}, \sqrt{3}).$$

16. (2000.Ⅰ)曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点$(1,-2,2)$ 的法线方程为________.

解 令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$,则在点$(1,-2,2)$ 处 $F_x=2,F_y=-8,F_z=12$. 故所求的法线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{6}.$$

17. (1996.Ⅰ,Ⅱ)函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为________.

解 方向 $\boldsymbol{l}=\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$, $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{1}{3}$.

$$\text{方向导数}\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,0,1)}=\left.\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right]\right|_{(1,0,1)}$$

$$=\left.\left[\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cos\alpha+\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\cos\beta+\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\cos\gamma\right)\right]\right|_{(1,0,1)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}.$$

18. (1991. Ⅰ,Ⅱ)设 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的指向外侧的法向量,求函数 $u=\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数.

解 设 $F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-6$,则

$$F_x=4x,F_y=6y,F_z=2z.$$

$$\boldsymbol{n}=(4x,6y,2z)|_P=(4,6,2),\boldsymbol{e}_n=\frac{1}{\sqrt{14}}(2,3,1).$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=\left.\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{6}{\sqrt{14}},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=\left.\frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{8}{\sqrt{14}},\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=-\left.\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}\right|_P=-\sqrt{14}.$$

从而

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_P=\left.\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{i}})+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}})+\frac{\partial u}{\partial z}\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{k}})\right]\right|_P$$

$$=\frac{6}{\sqrt{14}}\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+\frac{8}{\sqrt{14}}\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}-\sqrt{14}\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}=\frac{11}{7}.$$

19. (1998. Ⅰ)确定常数 λ,使在右半平面 $x>0$ 上的向量 $\boldsymbol{A}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度,并求 $u(x,y)$.

解 令 $P=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}$,$Q=-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}$. $\boldsymbol{A}(x,y)$ 在右半平面 $x>0$ 上为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度的充要条件是 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$,即

$$-2x(x^4+y^2)^\lambda-4\lambda x^5(x^4+y^2)^{\lambda-1}=2x(x^4+y^2)^\lambda+4\lambda xy^2(x^4+y^2)^{\lambda-1},$$

或
$$4x(x^4+y^2)^\lambda(\lambda+1)=0,$$

解得$\lambda=-1$. 于是，在右半平面内任取一点，例如(1,0)作为积分路径的起点，则得

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\int_1^x\frac{2x\cdot 0}{x^4+0^2}\mathrm{d}x-\int_0^y\frac{x^2}{x^4+y^2}\mathrm{d}y+C$$
$$=-\arctan\frac{y}{x^2}+C.$$

20. (2001. Ⅰ)设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\operatorname{div}(\mathbf{grad}\,r)\big|_{(1,-2,2)}=$ ________.

解 由梯度的定义

$$\mathbf{grad}\,r=\left(\frac{\partial r}{\partial x},\frac{\partial r}{\partial y},\frac{\partial r}{\partial z}\right)=\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right).$$

由散度的定义

$$\operatorname{div}(\mathbf{grad}\,r)=\operatorname{div}\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right)$$
$$=\frac{2}{r}.$$

故 $\operatorname{div}(\mathbf{grad}\,r)\big|_{(1,-2,2)}=\dfrac{2}{3}$.

21. (2005. Ⅰ)设有三元方程 $xy-z\ln y+\mathrm{e}^{xz}=1$，根据隐函数存在定理，存在点(0,1,1)的一个邻域，在此邻域内该方程(　　).

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$.

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$.

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$.

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$.

解 令 $F(x,y,z)=xy-z\ln y+\mathrm{e}^{xz}-1$，则

$$F_x=y+z\mathrm{e}^{xz},F_y=x-\frac{z}{y},\ F_z=-\ln y+x\mathrm{e}^{xz}.$$

$$F_x(0,1,1)=2\neq 0,F_y(0,1,1)=-1\neq 0,\ F_z(0,1,1)=0.$$

由隐函数存在定理知(A)、(B)、(C)均不成立，只有(D)成立.

22. (1994. Ⅱ)在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上求一点，使其到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短.

解 设 $P(x,y)$ 为椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上任意一点，则 P 到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|2x+3y-6|}{\sqrt{13}}$. 求 d 的最小值点即求 d^2 的最小值点. 作拉格朗日函数

$$L(x,y)=\frac{1}{13}(2x+3y-6)^2+\lambda(x^2+4y^2-4),$$

令

$$\begin{cases} L_x=\dfrac{4}{13}(2x+3y-6)+2\lambda x=0, \\ L_y=\dfrac{6}{13}(2x+3y-6)+8\lambda y=0. \end{cases}$$

由此得 $y=\dfrac{3}{8}x$,代入 $x^2+4y^2-4=0$. 求得

$$x_1=\frac{8}{5},y_1=\frac{3}{5};x_2=-\frac{8}{5},y_2=-\frac{3}{5}.$$

于是

$$d|_{(x_1,y_1)}=\frac{1}{\sqrt{13}},d|_{(x_2,y_2)}=\frac{11}{\sqrt{13}}.$$

由问题的实际意义知最短距离存在,因此 $\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{3}{5}\right)$ 即为所求点.

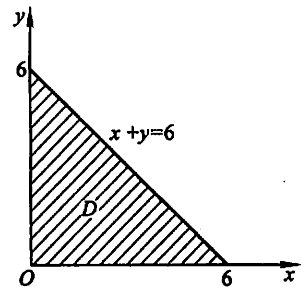
23. (1995. V)求二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6$、x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的极值,最大值与最小值.

解 由方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)=2xy(4-x-y)-x^2y=0, \\ f_y(x,y)=x^2(4-x-y)-x^2y=0. \end{cases}$$

得 $x=0(0\leqslant y\leqslant 6)$ 及点(4,0),(2,1).

点(4,0)及线段 $x=0(0\leqslant y\leqslant 6)$ 在 D 的边界上,只有点(2,1) 在 D 的内部(见图研 6-1),是可能极值点.



图研 6-1

$$f_{xx}=8y-6xy-2y^2,\ f_{xy}=8x-3x^2-4xy,f_{yy}=-2x^2.$$

在点(2,1)处

$$A=f_{xx}|_{\substack{x=2\\y=1}}=-6,B=f_{xy}|_{\substack{x=2\\y=1}}=-4,\ C=f_{yy}|_{\substack{x=2\\y=1}}=-8.$$

$AC-B^2=32>0$,且 $A<0$,因此点(2,1) 是 $z=f(x,y)$ 的极大值点,极大值 $f(2,1)=4$.

在 D 的边界 $x=0(0\leqslant y\leqslant 6)$ 及 $y=0(0\leqslant x\leqslant 6)$ 上 $f(x,y)=0$. 在边界 $x+y=6$ 上,$y=6-x$,代入 $f(x,y)$ 中得

$$z=2x^3-12x^2\quad(0\leqslant x\leqslant 6).$$

由 $z'=6x^2-24x=0$ 得 $\quad x=0,x=4.$

在边界 $x+y=6$ 上对应 $x=0,4,6$ 处的函数值分别为:

$$z|_{x=0}=2x^3-12x^2|_{x=0}=0,$$

$$z\big|_{x=4}=2x^3-12x^2\big|_{x=4}=-64,$$
$$z\big|_{x=6}=2x^3-12x^2\big|_{x=6}=0.$$

因此，$z=f(x,y)$ 在边界上的最大值为0，最小值为 $f(4,2)=-64$，将边界上最大值和最小值与驻点(2,1)处的值比较得，$z=f(x,y)$ 在闭区域上的最大值为 $f(2,1)=4$；最小值为 $f(4,2)=-64$.

24.（2006. Ⅰ）设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$. 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是（　　）.

(A) 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，　则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.

(B) 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，　则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

(C) 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，　则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.

(D) 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，　则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

解　由拉格朗日乘数法，得

$$\begin{cases}f_x'(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x'(x_0,y_0)=0,\\ f_y'(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y'(x_0,y_0)=0.\end{cases}$$

消去 λ，得

$$f_x'(x_0,y_0)=\frac{f_y'(x_0,y_0)\varphi_x'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}.$$

故当 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$ 时，必有 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$，应选(D).

25.（2004. Ⅰ）设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

解　在 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 两端分别对 x，y 求导，得

$$\begin{cases}2x-6y-2y\dfrac{\partial z}{\partial x}-2z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0, & (1)\\ -6x+20y-2z-2y\dfrac{\partial z}{\partial y}-2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0. & (2)\end{cases}$$

令 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，得

$$\begin{cases}x-3y=0,\\ -3x+10y-z=0.\end{cases}$$

解得　$x=3y$，$z=y$. 代入 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$，得

$$\begin{cases}x=9,\\ y=3,\\ z=3\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=-9,\\ y=-3,\\ z=-3.\end{cases}$$

在(1)两端对 x 求导，(2)两端分别对 x，y 求导，得

$$2-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

$$-6-2\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}-2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0,$$

$$20-2\frac{\partial z}{\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

将 $x=9,y=3,z=3$ 代入以上各式，求得

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_{(9,3,3)}=\frac{1}{6},\ B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\bigg|_{(9,3,3)}=-\frac{1}{2},\ C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\bigg|_{(9,3,3)}=\frac{5}{3},$$

$AC-B^2=\frac{1}{36}>0$，又 $A=\frac{1}{6}>0$，从而点 $(9,3)$ 是 $z(x,y)$ 的极小值点，极小值为 $z(9,3)=3$.

类似的，可得

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{1}{6},B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\bigg|_{(-9,-3,-3)}=\frac{1}{2},$$

$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\bigg|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{5}{3},$$

$$AC-B^2=\frac{1}{36}>0,$$

又 $A=-\frac{1}{6}<0$，从而点 $(-9,-3)$ 是 $z(x,y)$ 的极大值点，极大值为 $z(-9,-3)=-3$.

26.（2005. Ⅱ）已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz=2xdx-2ydy$，并且 $f(1,1)=2$. 求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\{(x,y)\mid x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1\}$ 上的最大值和最小值.

解法一 由 $dz=2xdx-2ydy$ 可知

$$z=f(x,y)=x^2-y^2+C.$$

再由 $f(1,1)=2$，得 $C=2$，故

$$z=f(x,y)=x^2-y^2+2.$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=2x=0$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-2y=0$，求得驻点 $(0,0)$.

在椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 上，$z=x^2-(4-4x^2)+2$，即

$$z=5x^2-2\ (-1\leqslant x\leqslant 1),$$

其最大值为 $z|_{x=\pm1}=3$，最小值为 $z|_{x=0}=-2$. 再与 $f(0,0)=2$ 比较，可知 $f(x,y)$ 在椭圆域 D 上的最大值为 3，最小值为 -2.

解法二 同解法一，求得驻点 $(0,0)$.

用拉格朗日乘数法求此函数在椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 上的极值.

设 $L=x^2-y^2+2+\lambda\left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right)$,

令

$$\begin{cases} L_x=2x+2\lambda x=0, & (1) \\ L_y=-2y+\frac{\lambda}{2}y=0. & (2) \end{cases}$$

又

$$x^2+\frac{y^2}{4}-1=0. \tag{3}$$

由(1)、(2)、(3)解得:

$$\lambda=-1,\ x=\pm 1,\ y=0;\ \lambda=4,\ x=0,\ y=\pm 2.$$

即有 4 个可能的极值点 $(1,0),(-1,0),(0,2),(0,-2)$.

又 $f(1,0)=f(-1,0)=3$, $f(0,2)=f(0,-2)=-2$, 再与 $f(0,0)=2$ 比较,得 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 3,最小值为 -2.

27. (2006. Ⅰ)设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数,且 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

(Ⅰ) 验证 $f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0$;

(Ⅱ) 若 $f(1)=0, f'(1)=1$,求函数 $f(u)$ 的表达式.

解 (Ⅰ)由 $z=f(u)$, $u=\sqrt{x^2+y^2}$,得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'\cdot\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}+f'\cdot\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

由已知条件,得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}f'=0,$$

即

$$f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0. \tag{1}$$

(Ⅱ) 方程(1)是可降阶的二阶微分方程,令 $f'(u)=p$,则得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u}+\frac{1}{u}p=0,$$

解得

$$p=C\mathrm{e}^{-\int\frac{\mathrm{d}u}{u}}=\frac{C}{u},$$

由已知条件 $p|_{u=1}=1$，得 $C=1$，故 $f'(u)=\frac{1}{u}$，从而

$$f(u)=\ln u+C.$$

由 $f(1)=0$，得 $C=0$，因此 $f(u)=\ln u$.

（七）多元函数积分学

1. (2001. Ⅰ)交换二次积分的积分次序：$\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{2}^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x=$ ________.

解 $$\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{2}^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{1-y}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x=-\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=-\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{1-x}^{0}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{0}^{1-x}f(x,y)\mathrm{d}y,$$
其中 $$D=\{(x,y)\mid 1-y\leqslant x\leqslant 2,-1\leqslant y\leqslant 0\}$$
$$=\{(x,y)\mid 1-x\leqslant y\leqslant 0,1\leqslant x\leqslant 2\}.$$

注 交换二次积分的积分次序时，需先将二次积分化为二重积分(尽管解题时往往省略这一步)，而将二次积分化为二重积分时，必须保证二次积分中的每个定积分的下限≤上限．本题中，由于当 $-1\leqslant y\leqslant 0$ 时，$1-y\leqslant 2$，故需将 $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{2}^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x$ 先写为 $-\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{1-y}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x$. 如果不注意这一点，就会得到错误结果：$\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{1-x}^{0}f(x,y)\mathrm{d}y$.

2. (2006. Ⅰ,Ⅱ)设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{1}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$ 等于( ).

(A) $\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_{x}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.　　(B) $\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

(C) $\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

解 积分区域 $$D=\left\{(\rho,\theta)\mid\ 0\leqslant\rho\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}$$
$$=\left\{(x,y)\mid\ y\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2},\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\right\},$$
故选(C).

3. (2006. Ⅰ,Ⅱ)设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0\}$，计算二重积分
$$I=\iint\limits_{D}\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解法一 $I_1=\iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{\text{极坐标}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{1+\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$

$$=\frac{\pi}{2}\ln(1+\rho^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2;$$

$$I_2=\iint\limits_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{\text{极坐标}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{1+\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{\rho^3}{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho=0,$$

所以 $I=I_1+I_2=\frac{\pi}{2}\ln 2.$

解法二 I_1 同上.

由于积分区域 D 关于 x 轴对称，函数 $\frac{xy}{1+x^2+y^2}$ 关于 y 是奇函数，所以

$$I_2=\iint\limits_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

因此 $I=I_1+I_2=\frac{\pi}{2}\ln 2.$

4. (2001. Ⅰ)计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}.$$

解 设 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant x,0\leqslant x\leqslant 1\}$，

$D_2=\{(x,y)\mid x\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant 1\}$，

则

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x+\int_0^1 y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y=2\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{e}-1.$$

5. (2000. Ⅳ)设 $f(x,y)=\begin{cases}x^2y, & \text{若 } 1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

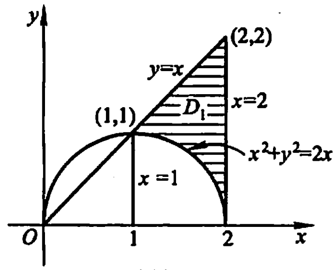
求 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 2x\}$.

解 如图研 7-1，记 $D_1=\{(x,y)\mid\sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant x,1\leqslant x\leqslant 2\}$，则

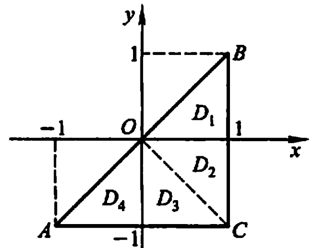
$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2 x^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^x y\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^2 x^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\sqrt{2x-x^2}}^{x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^2 (x^4-x^3)\mathrm{d}x=\frac{49}{20}.$$



图研 7-1



图研 7-2

6. (2001. Ⅲ)求二重积分 $\iint\limits_D y\left[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值,其中 D 是由直线 $y=x$,$y=-1$ 及 $x=1$ 围成的平面区域.

解 $$\text{原式}=\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D xy\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

如图研 7-2,将 D 划分成 D_1、D_2、D_3、D_4 四块. 由于 $xy\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ 关于 y 是奇函数,而闭区域 $D_1\cup D_2$ 关于 x 轴对称,故 $\iint\limits_{D_1\cup D_2} xy\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$;

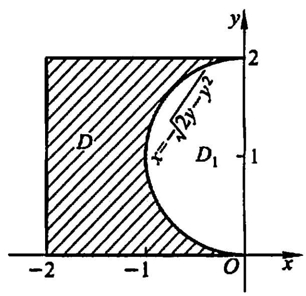
类似可说明 $$\iint\limits_{D_3\cup D_4} xy\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

从而 $$\iint\limits_D xy\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

又 $$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 y\mathrm{d}y\int_y^1\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 y(1-y)\mathrm{d}y=-\frac{2}{3},$$

故 原式 $=-\dfrac{2}{3}$.

7. (1999. Ⅲ,Ⅳ)计算二重积分 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由直线 $x=-2$,$y=0$,$y=2$ 以及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域.



图研 7-3

解法一 设闭区域 D 和 D_1 如图研 7-3 所示,则有

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D\cup D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

而 $$\iint\limits_{D\cup D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-2}^0\mathrm{d}x\int_0^2 y\mathrm{d}y=4,$$

$$\iint\limits_{D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal{\text{极坐标}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho\sin\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta \xlongequal{t=\pi-\theta} \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2},$$

故原式 $=4-\frac{\pi}{2}$.

解法二 $D=\{(x,y)\mid -2\leqslant x\leqslant -\sqrt{2y-y^2},0\leqslant y\leqslant 2\}$.

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 y\mathrm{d}y\int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^2 y(2-\sqrt{2y-y^2})\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^2 y\mathrm{d}y-\int_0^2 y\sqrt{2y-y^2}\mathrm{d}y$$

$$=4-\int_0^2 y\sqrt{1-(y-1)^2}\mathrm{d}y,$$

令 $y-1=\sin t$,则

$$\int_0^2 y\sqrt{1-(y-1)^2}\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2},$$

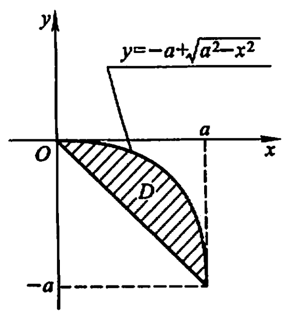
于是原式 $=4-\frac{\pi}{2}$.

8. (2000. Ⅲ)计算二重积分 $\iint\limits_D\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由曲线 $y=-a+\sqrt{a^2-x^2}\,(a>0)$ 和直线 $y=-x$ 围成的区域.

解 积分区域 D 在极坐标系中可表示为

$$D=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant -2a\sin\theta,-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant 0\}$$

(图研 7-4),



图研 7-4

故 原式 $=\iint\limits_D\frac{\rho}{\sqrt{4a^2-\rho^2}}\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{\rho^2}{\sqrt{4a^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho,$$

令 $\rho = 2a\sin t$，则

$$\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{\rho^2}{\sqrt{4a^2-\rho^2}}d\rho = \int_0^{-\theta}4a^2\sin^2 t dt = 2a^2\int_0^{-\theta}(1-\cos 2t)dt$$

$$= 2a^2\left(-\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right).$$

于是

$$原式 = 2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left(-\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)d\theta = a^2\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\right).$$

9. (1995. Ⅰ)设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，并设$\int_0^1 f(x)dx = A$，求 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$.

解法一 交换积分次序可得

$$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy = \int_0^1 dy\int_0^y f(x)f(y)dx$$

$$= \int_0^1 dx\int_0^x f(y)f(x)dy.$$

上式中的第二个等号是由于将积分变量 x、y 分别改记为 y、x，不影响二次积分的值．从而有

$$2\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy = \int_0^1 dx\int_0^x f(x)f(y)dy + \int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$$

$$= \int_0^1 dx\int_0^1 f(x)f(y)dy = \int_0^1 f(x)dx\cdot\int_0^1 f(y)dy = A^2,$$

故

$$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy = \frac{1}{2}A^2.$$

解法二 记函数 $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$，则 $F(0) = A, F(1) = 0$，且 $dF(x) = -f(x)dx$. 利用分部积分公式，有

$$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy = \int_0^1\left[\int_x^1 f(y)dy\right]f(x)dx = -\int_0^1 F(x)dF(x)$$

$$= -\left[\frac{F^2(x)}{2}\right]_0^1 = \frac{A^2}{2}.$$

10. (1989. Ⅰ，Ⅱ)设半径为 R 的球面 Σ 的球心在定球面 $x^2+y^2+z^2 = a^2(a>0)$ 上，问当 R 取何值时，球面 Σ 在定球面内部的那部分的面积最大?

解 不妨设 z 轴通过球面 Σ 的中心，则 Σ 的方程为

$$x^2+y^2+(z-a)^2 = R^2.$$

与定球面方程 $x^2+y^2+z^2 = a^2$ 联立，消去 z，可得两球面的交线在 xOy 面上的投影曲线为

$$\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{R^2}{4a^2}(4a^2-R^2),\\ z=0.\end{cases}$$

记投影曲线所围的平面区域为 D_{xy}. 球面 Σ 在定球面内部的那部分曲面的方程为

$$z=a-\sqrt{R^2-x^2-y^2},$$

该部分曲面的面积为

$$\begin{aligned}S(R)&=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{R}{2a}\sqrt{4a^2-R^2}}\frac{\rho R\,\mathrm{d}\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\\&=2\pi R^2-\frac{\pi R^3}{a}.\end{aligned}$$

$$S'(R)=4\pi R-\frac{3\pi R^2}{a},S''(R)=4\pi-\frac{6\pi R}{a}.$$

令 $S'(R)=0$,得驻点 $R_1=0$(舍去),$R_2=\frac{4}{3}a$,

$$S''\left(\frac{4}{3}a\right)=-4\pi<0,$$

故当 $R=\frac{4}{3}a$ 时,球面 Σ 在定球面内部的那部分的面积最大.

11. (2000. Ⅰ)设有一半径为 R 的球体,P_0 是此球的表面上的一个定点,球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比(比例常数 $k>0$),求球体的重心位置.

解 记球体为 Ω,以 Ω 的球心为原点 O,射线 OP_0 为正 z 轴建立直角坐标系,则 P_0 的坐标是 $(0,0,R)$,球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$. 设重心位置为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$,则由对称性得 $\bar{x}=0,\bar{y}=0$,

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}z\cdot k[x^2+y^2+(z-R)^2]\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}k[x^2+y^2+(z-R)^2]\mathrm{d}v}.$$

由对称性可知 $\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}v=0$;$\iiint\limits_{\Omega}z^3\mathrm{d}v=0$;$\iiint\limits_{\Omega}z(x^2+y^2)\mathrm{d}v=0$;

$$\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v,$$

于是

$$\iiint\limits_{\Omega}[x^2+y^2+(z-R)^2]\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v+\iiint\limits_{\Omega}R^2\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r+\frac{4}{3}\pi R^5$$

$$=\frac{4}{5}\pi R^5+\frac{4}{3}\pi R^5=\frac{32}{15}\pi R^5;$$

$$\iiint\limits_{\Omega}z[x^2+y^2+(z-R)^2]\mathrm{d}v=-2R\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}v$$

$$=-\frac{2R}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=-\frac{8}{15}\pi R^6,$$

故
$$\bar{z}=\left(-\frac{8}{15}\pi R^6\right)\Big/\left(\frac{32}{15}\pi R^5\right)=-\frac{R}{4},$$

因此球体 Ω 的重心位置为 $\left(0,0,-\frac{R}{4}\right)$.

12. (1998. Ⅰ)设 l 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a，则 $\oint_l(2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=$ ________.

解 因为 l 关于 y 轴对称，且 $2xy$ 关于 x 是奇函数，所以 $\oint_l 2xy\mathrm{d}s=0$. 又在 l 上，$3x^2+4y^2=12$，所以

$$\text{原积分}=\oint_l 2xy\mathrm{d}s+\oint_l(3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=0+\oint_l 12\mathrm{d}s=12a.$$

13. (2006. Ⅱ)设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧，则 $\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

解 添加辅助曲面 $\Sigma':\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant 1,z=1\}$，取上侧，则由高斯公式得

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma'}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(1+2+3)\mathrm{d}v=6\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v$$

$$=6\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 1^2\cdot 1=2\pi,$$

而在 Σ' 上，

$$\iint\limits_{\Sigma'}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma'}3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}3(1-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

于是
$$\text{原式}=2\pi-0=2\pi.$$

14. (1996. Ⅰ, Ⅱ)已知 $\frac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分，则 a 等于(　　).

(A) -1. (B) 0

(C) 1. (D) 2.

解 $$P(x,y)=\frac{x+ay}{(x+y)^2},Q(x,y)=\frac{y}{(x+y)^2},$$

由 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 即可解得 $a=2$. 应选(D).

15. (1995. Ⅰ,Ⅱ)设曲线 $Q(x,y)$ 在 xOy 平面上具有一阶连续偏导数,曲线积分 $\int_L 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关,并且对任意 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

求 $Q(x,y)$.

解 由曲线积分与路径无关的条件知

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(2xy)=2x,$$

因此 $Q(x,y)=x^2+\varphi(y)$,其中 $\varphi(y)$ 为待定的可导函数,采用从点(0,0)到点$(t,0)$再到点$(t,1)$的有向折线作为积分路径,可得

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1[t^2+\varphi(y)]\mathrm{d}y=t^2+\int_0^1\varphi(y)\mathrm{d}y;$$

采用从点(0,0)到点(1,0)再到点$(1,t)$的有向折线作为积分路径,可得

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^t[1^2+\varphi(y)]\mathrm{d}y=t+\int_0^t\varphi(y)\mathrm{d}y.$$

由题设知

$$t^2+\int_0^1\varphi(y)\mathrm{d}y=t+\int_0^t\varphi(y)\mathrm{d}y.$$

两边对 t 求导,得

$$2t=1+\varphi(t),\quad \varphi(t)=2t-1.$$

从而 $\varphi(y)=2y-1$. 因此

$$Q(x,y)=x^2+2y-1.$$

16. (2006. Ⅰ)设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内,函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数,且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$. 证明:对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L,都有 $\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0$.

证 在单连通域 D 内,对任意有向简单闭曲线 L,

$$\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0$$

的充分必要条件是,对任意的 $(x,y)\in D$,有

$$0=\frac{\partial}{\partial y}[yf(x,y)]-\frac{\partial}{\partial x}[-xf(x,y)]$$

$$= 2f(x,y) + yf_2'(x,y) + xf_1'(x,y). \quad (*)$$

由于对任意的 $(x,y) \in D$ 及 $t>0$,都有

$$f(tx,ty) = t^{-2}f(x,y),$$

两边对 t 求导,得

$$xf_1'(tx,ty) + yf_2'(tx,ty) = -2t^{-3}f(x,y).$$

在上式中令 $t=1$,得

$$2f(x,y) + xf_1'(x,y) + yf_2'(x,y) = 0,$$

(*)式成立.所以结论成立.

17. (1991.Ⅰ,Ⅱ)在过点 $O(0,0)$ 和 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y = a\sin x(a>0)$ 中,求一条曲线 L,使沿该曲线 L 从 O 到 A 的积分 $\int_L (1+y^3)\mathrm{d}x + (2x+y)\mathrm{d}y$ 的值最小.

解 $$I(a) = \int_0^{\pi}[1 + a^3\sin^3 x + (2x + a\sin x)\cdot a\cos x]\mathrm{d}x$$
$$= \pi - 4a + \frac{4}{3}a^3.$$

令 $I'(a) = -4 + 4a^2 = 0$,得 $a=1$(舍去 $a=-1$),且 $a=1$ 是 $I(a)$ 在区间$(0,+\infty)$内的惟一驻点,又 $I''(1)=8>0$,因此 $I(a)$ 在 $a=1$ 处取得最小值.从而所求曲线为 $y = \sin x(0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

18. (2005.Ⅰ)设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数,在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上,曲线积分

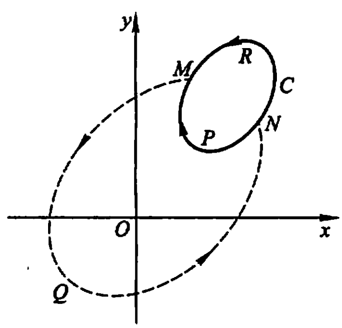
$$\oint_L \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y}{2x^2 + y^4}$$

的值恒为同一常数.

(Ⅰ)证明:对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C,有

$$\oint_C \frac{\varphi(y)\mathrm{d}y + 2xy\mathrm{d}y}{2x^2 + y^4} = 0;$$

(Ⅱ)求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.



图研 7-5

(Ⅰ)**证** 如图研 7-5,设 C 是半平面 $x>0$ 内的任一分段光滑简单闭曲线,在 C 上任意取定两点 M、N,作围绕原点的闭曲线 $\widehat{MQNRM}$,同时得到另一围绕原点的闭曲线 $\widehat{MQNPM}$. 根据题设,有

$$\oint_{\widehat{MQNRM}} \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y}{2x^2 + y^4} - \oint_{\widehat{MQNPM}} \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y}{2x^2 + y^4}$$

（记作$\left(\oint\limits_{\widehat{MQNRM}} - \oint\limits_{\widehat{MQNPM}}\right)\dfrac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$，下同）$=0$.

根据第二类曲线积分的性质，再利用上式可得

$$\oint_C \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4} = \left(\int\limits_{\widehat{NRM}} + \int\limits_{\widehat{MPN}}\right)\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$$

$$= \left(\int\limits_{\widehat{NRM}} - \int\limits_{\widehat{NPM}}\right)\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$$

$$= \left[\left(\int\limits_{\widehat{MQN}} + \int\limits_{\widehat{NRM}}\right) - \left(\int\limits_{\widehat{MQN}} + \int\limits_{\widehat{NPM}}\right)\right]\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$$

$$= \left(\oint\limits_{\widehat{MQNRM}} - \oint\limits_{\widehat{MQNPM}}\right)\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4} = 0.$$

（Ⅱ）解　设 $P=\dfrac{\varphi(y)}{2x^2+y^4}, Q=\dfrac{2xy}{2x^2+y^4}$，$P$、$Q$在单连通区域$x>0$内具有一阶连续偏导数．由（Ⅰ）知，曲线积分$\displaystyle\int_L \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$在该区域内与路径无关，故当$x>0$时，恒有$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y(2x^2+y^4)-4x\cdot 2xy}{(2x^2+y^4)^2} = \frac{-4x^2y+2y^5}{(2x^2+y^4)^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\varphi'(y)(2x^2+y^4)-4\varphi(y)y^3}{(2x^2+y^4)^2} = \frac{2x^2\varphi'(y)+\varphi'(y)y^4-4\varphi(y)y^3}{(2x^2+y^4)^2},$$

比较上列两式的右端，要使它们恒等，需有

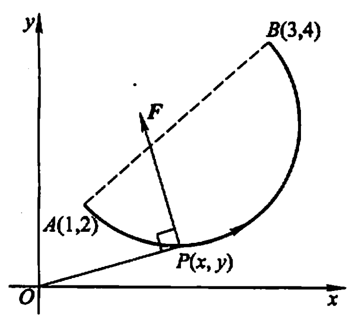
$$\varphi'(y)=-2y \quad 和 \quad \varphi'(y)y^4-4\varphi(y)y^3=2y^5.$$

由 $\varphi'(y)=-2y$ 得 $\varphi(y)=-y^2+C$，代入第二式得

$$\varphi'(y)y^4-4\varphi(y)y^3=-2y^5+4y^5-4Cy^3=2y^5,$$

因此 $C=0$，从而得 $\varphi(y)=-y^2$.

19.（1990. Ⅰ，Ⅱ）质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周，从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受变力 $\boldsymbol{F}$ 的作用（图研 7－6），$\boldsymbol{F}$ 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离，其方向垂直于线段 OP，且与 y 轴正向的夹角小于$\dfrac{\pi}{2}$. 求变力 $\boldsymbol{F}$ 对质点 P 所作的功．



图研 7－6

解　$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，

按题意，$|\boldsymbol{F}|=|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

由于 $\boldsymbol{F}$ 与$\overrightarrow{OP}$垂直且与 y 轴正向夹角小于$\frac{\pi}{2}$，故 $\boldsymbol{F}$ 在 y 轴上的投影为正，因此与 $\boldsymbol{F}$ 同方向的单位向量为

$$e_F=\frac{-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

于是
$$\boldsymbol{F}=|\boldsymbol{F}|e_F=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}.$$

又圆弧$\overset{\frown}{AB}$ 的参数方程为 $x=2+\sqrt{2}\cos t, y=3+\sqrt{2}\sin t$（$t$ 从 $-\frac{3}{4}\pi$ 变到 $\frac{\pi}{4}$），因此变力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为

$$\begin{aligned}W&=\int_{\overset{\frown}{AB}}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{\overset{\frown}{AB}}-y dx+x dy\\&=\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}}\left[(3+\sqrt{2}\sin t)\sqrt{2}\sin t+(2+\sqrt{2}\cos t)\sqrt{2}\cos t\right]dt\\&=3\sqrt{2}\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}}\sin t dt+2\sqrt{2}\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}}\cos t dt+2\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}}dt\\&=2(\pi-1).\end{aligned}$$

注 也可以利用格林公式来计算 $\int_{\overset{\frown}{AB}}-y dx+x dy$. 为此添加有向线段 BA：$y=x+1$，x 从 3 变到 1. 由格林公式得

$$\oint_{\overset{\frown}{AB}+BA}-y dx+x dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx dy=2\iint_D dx dy=2\pi;$$

而
$$\int_{BA}-y dx+x dy=\int_3^1[-(x+1)+x]dx=2,$$

因此
$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}}-y dx+x dy=2\pi-2=2(\pi-1).$$

20.（1992. Ⅰ，Ⅱ）在变力 $\boldsymbol{F}=yz\boldsymbol{i}+zx\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$ 的作用下，质点由原点沿直线运动到椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上第一卦限的点 $M(\xi,\eta,\zeta)$，问 ξ,η,ζ 取何值时，力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功 W 最大？并求 W 的最大值.

解 直线段 OM 的参数方程可取为

$$x=\xi t,\ y=\eta t,\ z=\zeta t, t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 1.$$

$\boldsymbol{F}$ 所作的功为

$$\begin{aligned}W&=\int_{OM}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{OM}yz dx+zx dy+xy dz\\&=\int_0^1 3\xi\eta\zeta t^2 dt=\xi\eta\zeta.\end{aligned}$$

下面求 $W=\xi\eta\zeta$ 在条件$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1(\xi\geqslant 0,\eta\geqslant 0,\zeta\geqslant 0)$ 下的最大值.

令 $$L(\xi,\eta,\zeta)=\xi\eta\zeta+\lambda\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1\right),$$

由 $\frac{\partial L}{\partial \xi}=0,\frac{\partial L}{\partial \eta}=0,\frac{\partial L}{\partial \zeta}=0$ 得

$$\eta\zeta=-\frac{2\lambda}{a^2}\xi,\xi\zeta=-\frac{2\lambda}{b^2}\eta,\xi\eta=-\frac{2\lambda}{c^2}\zeta.$$

若 $\lambda=0$,则由 $\eta\zeta=0$ 得 $\eta=0$ 或 $\zeta=0$,从而

$$W=\xi\eta\zeta=0\qquad(\text{显然不是 }W\text{ 的最大值,舍去});$$

若 $\lambda\neq0$,则得

$$\frac{\xi^2}{a^2}=\frac{\eta^2}{b^2}=\frac{\zeta^2}{c^2}\left(=-\frac{\xi\eta\zeta}{2\lambda}\right),$$

从而 $\frac{\xi^2}{a^2}=\frac{\eta^2}{b^2}=\frac{\zeta^2}{c^2}=\frac{1}{3}$. 于是得惟一可能极值点:

$$\xi=\frac{a}{\sqrt3},\eta=\frac{b}{\sqrt3},\zeta=\frac{c}{\sqrt3}.$$

由问题的实际意义知功的最大值为

$$W_{\max}=\frac{\sqrt3}{9}abc.$$

21. (1999. Ⅰ)求 $I=\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y))\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y$,其中 a,b 为正的常数,L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.

解法一 添加从点 $O(0,0)$ 沿 $y=0$ 到点 $A(2a,0)$ 的有向线段 L_1,则由格林公式得

$$\begin{aligned}&\oint_{L+L_1}(\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y))\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y\\&=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(b-a)\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{2}a^2(b-a),\end{aligned}$$

其中 D 为由 L 和 L_1 所围成的半径为 a 的半圆域.

又 $$\begin{aligned}&\int_{L_1}(\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y))\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2a}(-bx)\mathrm{d}x=-2a^2b,\end{aligned}$$

从而 $$I=\frac{\pi}{2}a^2(b-a)-(-2a^2b)=\left(\frac{\pi}{2}+2\right)a^2b-\frac{\pi}{2}a^3.$$

解法二 将 I 写成两个积分之差:

$$I=\int_L\mathrm{e}^x\sin y\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x\cos y\mathrm{d}y-\int_L b(x+y)\mathrm{d}x+ax\mathrm{d}y,$$

前一积分与路径无关，故可将 L 改为有向线段 AO：$y=0$，x 从 $2a$ 变到 0，得

$$\int_L e^x \sin y \mathrm{d}x + e^x \cos y \mathrm{d}y = \int_{2a}^{0} e^x \cdot 0 \mathrm{d}x = 0;$$

对后一积分，取 L 的参数方程：$x = a + a\cos t, b = a\sin t$，$t$ 从 0 变到 π，得

$$I = 0 - \int_0^{\pi} [b(a + a\cos t + a\sin t)(-a\sin t) + a(a + a\cos t)(a\cos t)]\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi} (a^2 b\sin t + a^2 b\sin t\cos t + a^2 b\sin^2 t - a^3\cos t - a^3\cos^2 t)\mathrm{d}t$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)a^2 b - \frac{\pi}{2}a^3.$$

22. (2000. Ⅰ)计算曲线积分 $I = \oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2}$，其中 L 是以点 $(1,0)$ 为中心，R 为半径的圆周 $(R>1)$，取逆时针方向．

解 $$P = \frac{-y}{4x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{4x^2 + y^2}.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, (x,y) \neq (0,0).$$

在 L 所围的圆域内作足够小的椭圆 C：$x = \frac{r}{2}\cos t, y = r\sin t (r>0)$，$t$ 从 0 变到 2π. 于是在由 L 和 C^- 所围成的区域 D 上应用格林公式，得

$$\oint_{L+C^-} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma = 0,$$

从而有

$$I = \oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2} = \oint_C \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{r^2}{r^2}\mathrm{d}t = \pi.$$

23. (2001. Ⅰ)计算 $I = \oint_L (y^2 - z^2)\mathrm{d}x + (2z^2 - x^2)\mathrm{d}y + (3x^2 - y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 是平面 $x + y + z = 2$ 与柱面 $|x| + |y| = 1$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 为逆时针方向．

解 记 Σ 为平面 $x + y + z = 2$ 的上侧被 L 所围成的部分，则 Σ 上各点处的法向量的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

Σ 在 xOy 面上的投影区域 $D_{xy} = \{(x,y) \mid |x| + |y| \leqslant 1\}$.

由斯托克斯公式，

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(4x+2y+3z)\mathrm{d}S$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{D_{xy}}(x-y+6)\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\text{(由对称性易知}\iint_{D}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0)$$

$$=-12\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-24.$$

24. (1999. Ⅰ)设 S 为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分，点 $P(x,y,z)\in S$，Π 为 S 在点 P 处的切平面，$\rho(x,y,z)$ 为点 $O(0,0,0)$ 到平面 Π 的距离，求 $\iint_{S}\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$.

解　设 (X,Y,Z) 为切平面 Π 上任意一点，则 Π 的方程为 $\frac{xX}{2}+\frac{yY}{2}+zZ=1$，原点 $O(0,0,0,)$ 到 Π 的距离 $\rho(x,y,z)=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$.

由于 S 的方程为 $z=\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}$，故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}},$$

于是

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}\sigma=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}}\mathrm{d}\sigma.$$

又 S 在 xOy 面上的投影区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$，从而

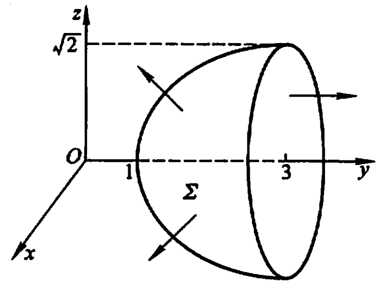
$$\iint_{S}\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S=\frac{1}{4}\iint_{D}(4-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma.$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(4-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho=\frac{3}{2}\pi.$$

25. (1987. Ⅰ，Ⅱ)计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(8y+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是由曲线 $\begin{cases}z=\sqrt{y-1}\\x=0\end{cases}$，$(1\leqslant y\leqslant 3)$ 绕 y 轴旋转一周所成的曲面，它的法向量与 y 轴正向的夹角恒大于 $\frac{\pi}{2}$.



图研 7－7

解 设 Σ_1 为平面 $y=3$ 的右侧被 $x^2+z^2=2$ 所围成的部分(图研 7－7)，Ω 为由 Σ 和 Σ_1 所围成的空间闭区域，则由高斯公式得

$$\begin{aligned}I=&\iiint_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial x}[(8y+1)x]+\frac{\partial}{\partial y}[2(1-y^2)]+\frac{\partial}{\partial z}(-4yz)\right\}\mathrm{d}v\\&-\iint_{\Sigma_1}(8y+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v-\iint_{\Sigma_1}2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\\=&\int_1^3\pi(y-1)\mathrm{d}y-\iint_{x^2+z^2\leqslant 2}2(1-3^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\\=&2\pi+32\pi=34\pi.\end{aligned}$$

26. (2000. Ⅰ)对于半空间 $x>0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 S，都有

$$\oiint_S xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有连续的一阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$. 求 $f(x)$.

解 由题设和高斯公式得

$$\begin{aligned}0=&\oiint_S xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\pm\iiint_{\Omega}[xf'(x)+f(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x}]\mathrm{d}v,\end{aligned}$$

其中 Ω 为由 S 围成的有界闭区域，当 S 取外侧时，取“＋”号，当 S 取内侧时，取“－”号. 由 S 的任意性及 $f(x)$、$f'(x)$ 的连续性，可知必有

$$xf'(x)+f(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x}=0\quad(x>0),$$

即 $$f'(x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)f(x)=\frac{1}{x}\mathrm{e}^{2x}\qquad(x>0).$$

按一阶线性非齐次微分方程通解公式(教材上册第七章第四节)，有

$$f(x)=e^{\int\left(1-\frac{1}{x}\right)dx}\left[\int \frac{1}{x}e^{2x}\cdot e^{\int\left(\frac{1}{x}-1\right)dx}dx+C\right]$$

$$=\frac{e^x}{x}\left[\int \frac{1}{x}e^{2x}\cdot xe^{-x}dx+C\right]=\frac{e^x}{x}(e^x+C).$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{2x}+Ce^x}{x}=1$，故必有

$$\lim_{x\to 0^+}(e^{2x}+Ce^x)=0,$$

从而 $C=-1$. 于是

$$f(x)=\frac{e^x}{x}(e^x-1).$$

（八）无穷级数

1.（1988. Ⅰ，Ⅱ）设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，它在区间$(-1,1]$上的定义为

$$f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\leqslant 0,\\ x^3, & 0<x\leqslant 1,\end{cases}$$

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛于________.

解 $x=1$ 是 $f(x)$ 的间断点，故级数在该点处收敛于$\dfrac{f(1^-)+f(-1^+)}{2}=\dfrac{3}{2}$.

2.（1993.Ⅰ,Ⅱ）设函数 $f(x)=\pi x+x^2(-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数展开式为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则其中系数 b_3 的值为________.

解 $b_3=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 3x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi x+x^2)\sin 3x\mathrm{d}x$，

其中$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin 3x\mathrm{d}x=0$，故

$$\begin{aligned}b_3&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi x\sin 3x\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}x\sin 3x\mathrm{d}x\\&=-\frac{2}{3}[x\cos 3x]_0^{\pi}+\frac{2}{3}\int_0^{\pi}\cos 3x\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

3.（1995. Ⅰ，Ⅱ）幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R=$ ________.

解 由于 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{|2^n+(-3)^n|}{|2^{n+1}+(-3)^{n+1}|}|x^2|=\frac{|x|^2}{3}$，从 $\dfrac{|x|^2}{3}<1$ 得$|x|<\sqrt{3}$，故 $R=\sqrt{3}$.

4.（1997. Ⅰ）设幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 3，则幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为________.

解 由幂级数的性质知 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n+1}$ 及$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛半

径相同,故幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为$|x-1|<3$,即$(-2,4)$.

5.(1988. Ⅰ,Ⅱ)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛,则此级数在 $x=2$ 处(　　).

(A) 条件收敛.　　(B) 绝对收敛.

(C) 发散.　　(D) 收敛性不能确定.

解　(1)因为 $x=-1$ 是级数的收敛点,由阿贝尔(Abel)定理知,在 $|x-1|<|-1-1|=2$ 内,级数绝对收敛.现 $x=2$ 满足 $|x-1|<2$,故选(B).

6.(1989. Ⅰ,Ⅱ)设 $f(x)=x^2,0\leqslant x<1$,而正弦级数

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x,\text{其中 } b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots).$$

则 $S\left(-\frac{1}{2}\right)=$(　　).

(A) $-\frac{1}{2}$;　　(B) $-\frac{1}{4}$;　　(C) $\frac{1}{4}$;　　(D) $\frac{1}{2}$.

解　由 b_n 的表达式可推知,$S(x)$ 是 $f(x)$ 在$(-1,0)$上作奇延拓后所得函数的傅里叶级数的和函数.$x=-\frac{1}{2}$ 是奇延拓后所得函数的连续点,故

$S\left(-\frac{1}{2}\right)=-S\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$.故选(B).

7.(1990. Ⅰ,Ⅱ)设 a 为常数,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(na)}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$(　　).

(A) 绝对收敛.　　(B) 条件收敛.

(C) 发散.　　(D) 收敛性与 a 的取值有关.

解　因 $|\sin(na)|\leqslant 1$,故由比较审敛法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)}{n^2}$绝对收敛,但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散,故所给级数发散.选(C).

8.(1994. Ⅰ,Ⅱ)设常数 $\lambda>0$ 且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$(　　).

(A) 发散.　　(B) 条件收敛.

(C) 绝对收敛.　　(D) 收敛性与 λ 有关.

解　因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\lambda}$ 收敛,故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2+\lambda}\right)$收敛.

又 $\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\leqslant\dfrac{1}{2}\left(a_n^2+\dfrac{1}{n^2+\lambda}\right)$，由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ 收敛，故所给级数绝对收敛．选(C)．

9．(1996．Ⅰ，Ⅱ)设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，常数 $\lambda\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n\tan\dfrac{\lambda}{n}\right)a_{2n}$(　　)．

(A) 绝对收敛．　　　　(B) 条件收敛．

(C) 发散．　　　　(D) 收敛性与 λ 有关．

解　设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛于 S，则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 的部分和显然不超过 S，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛．又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\tan\dfrac{\lambda}{n}a_{2n}}{a_{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan\dfrac{\lambda}{n}}{\dfrac{\lambda}{n}}\cdot\lambda=\lambda$，由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\tan\dfrac{\lambda}{n}a_{2n}$ 收敛．故选(A)．

10．(2000．Ⅰ)设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则必收敛的级数为(　　)．

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u_n}{n}$．　　　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$．

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$．　　　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$．

解　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+1}$ 也收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$ 必收敛．故选(D)．下面各举一例说明级数(A)(B)(C)不必收敛．如：

(A) 中取 $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u_n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln(n+1)}$ 发散(见下面的说明)．

(B) 中取 $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散．

(C) 中取 $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{2n}\right)$ 发散．

(A) 中提及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln(n+1)}$ 发散是这样证明的：注意到函数 $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$

在$(1,+\infty)$单调减少，有$\dfrac{1}{n\ln n}>\dfrac{1}{x\ln x}$，$x\in(n,n+1)$.

因而有
$$\frac{1}{n\ln n}=\int_n^{n+1}\frac{1}{n\ln n}\mathrm{d}x>\int_n^{n+1}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x.$$

于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln(n+1)}$的部分和
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\ln(k+1)}>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}>\sum_{k=1}^{n}\int_{k+1}^{k+2}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$$
$$=\int_2^{n+2}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=[\ln\ln x]_2^{n+2}=\ln[\ln(n+2)]-\ln(\ln 2),$$
因部分和无界，故级数发散.

11. (2002. Ⅰ)设$u_n\neq 0(n=1,2,3,\cdots)$且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$(　　).

(A) 发散.　　　　(B) 绝对收敛.

(C) 条件收敛.　　(D) 收敛性根据所给条件不能判定.

解　应选(C).

首先可以用特例来排除(A)与(B)，依条件取$u_n=n$，则由莱布尼茨判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{u_n}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{u_{n+1}}$均收敛，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$收敛，这就排除了(A)；又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$发散，这就排除了(B).

要证明(C)是正确的，考察级数的前n项部分和
$$S_n=\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}\right)-\left(\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}\right)+\left(\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}\right)-\cdots+(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{u_1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{u_{n+1}},$$
由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$，说明$\dfrac{1}{u_n}\sim\dfrac{1}{n}(n\to\infty)$，故$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{u_{n+1}}=0$，

即
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{u_1},$$
因此，级数收敛且条件收敛.

12. (2003. Ⅰ)设$x^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$，则$a_2=$________.

解　a_2是偶函数x^2的周期为2π的傅里叶级数中对应于$\cos 2x$的系数，故
$$a_2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2x\sin 2x\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(x\cos 2x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos 2x\mathrm{d}x\right)$$
$$= 1.$$

13. (2003. Ⅲ)设 $p_n = \dfrac{a_n + |a_n|}{2}, q_n = \dfrac{a_n - |a_n|}{2}, n = 1,2,\cdots$,则下列命题中正确的是(　　).

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛.

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛.

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ 的敛散性都不定.

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ 的敛散性都不定.

解　应选(B). 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛,有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛,同时排除了(D). 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散,从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ 都发散,因此排除了(A)与(C).

14. (2004. Ⅲ)设有以下命题:

① 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

② 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{n+100}$ 收敛.

③ 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

④ 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛.

则以上命题中正确的是(　　).

(A) ① ②.　　(B) ② ③.　　(C) ③ ④.　　(D) ① ④.

解　应选(B). 因为 ① 与 ④中两个收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} + u_{2n})$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ 取 $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$ 时,不难看出 ①、④ 的结论都是不成立的.

由于级数添加或去除有限项后,不改变级数的收敛性,故②是正确的.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$,说明自某项起有 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$,即 $u_{n+1} > u_n$,从而 $u_n \not\to 0(n\to\infty)$,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,③ 是正确的.

15. (2004. Ⅰ)设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项级数,下列结论中正确的是(　　).

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(B) 若存在非零常数λ. 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

(C) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=0$.

(D) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,则存在非零常数λ,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$.

解 应选(B),这是极限形式的比较审敛法的一个常用结论.

取 $a_n=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 可排除(C);取 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$,可排除(D);至于排除(A)的例子,可取 $a_n=\frac{1}{n\ln n}(n=2,3,\cdots)$,由于

$$a_n=\frac{1}{n\ln n}>\int_n^{n+1}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x,$$

故部分和

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n>a_1+\int_2^3\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x+\int_3^4\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$$
$$=a_1+\int_2^{n+1}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x,$$

而
$$\lim_{n\to\infty}\int_2^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\lim_{n\to\infty}\ln\ln x\Big|_2^{n+1}=+\infty,$$

说明部分和 s_n 无界,因此级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散,从而(A)是错误的.

16. (1994. Ⅰ,Ⅱ)设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数,且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$,证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

证 由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$ 可推知 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$. 由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,故有 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$, 从而 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$. 于是 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域可用泰勒公式表为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta x)}{2}x^2=\frac{f''(\theta x)}{2}x^2\quad(0<\theta<1).$$

又因 $f''(x)$ 在该邻域内连续,故必在该邻域的某闭区间 $[-\delta,\delta]$ 上有界,即当 $x\in[-\delta,\delta]$ 时, $|f''(x)|\leqslant M$,于是 $|f(x)|\leqslant\frac{M}{2}x^2$. 当 n 充分大后, $x=$

$\frac{1}{n} \in [-\delta,\delta]$，就有

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2}\frac{1}{n^2}.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{2}\frac{1}{n^2}$ 收敛，由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

17. (1989. Ⅰ，Ⅱ)将函数 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$ 展为 x 的幂级数.

解 因 $f'(x)=(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, -1<x<1,$

故 $f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n x^{2n}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$

又
$$f(0)=\arctan\frac{1+0}{1-0}=\frac{\pi}{4},$$

因此
$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}, -1<x<1.$$

由于上式右端的幂级数在 $x=-1$ 处收敛，且 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$ 在 $x=-1$ 处连续，故

$$\arctan x=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}, -1\leqslant x<1.$$

18. (1993. Ⅰ，Ⅱ)求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$ 的和.

解 所给级数是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n+1)x^n$ 中 x 取 $-\frac{1}{2}$ 的情形. 易见 $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n+1)x^n$ 的收敛域为 $(-1, 1)$，记和函数为 $S(x)$，于是 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=S\left(-\frac{1}{2}\right)$. 下面求 $S(x)$.

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n\\&=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^n+\frac{1}{1-x}\\&=x^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}+\frac{1}{1-x}.\end{aligned}$$

设 $\varphi(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}$，则

$$\int_0^x \varphi(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{\infty} n x^{n-1},$$

$$\int_0^x \left[\int_0^x \varphi(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{\infty} x^n = \frac{x^2}{1-x}, -1 < x < 1.$$

于是 $$\varphi(x) = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3},$$

从而 $$S(x) = x^2\varphi(x) + \frac{1}{1-x} = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{1}{1-x}.$$

所以原级数的和为 $S\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{27} + \frac{2}{3} = \frac{22}{27}$.

19.(1995. Ⅰ,Ⅱ)将 $f(x)=x-1(0\leqslant x\leqslant 2)$ 展开成周期为 4 的余弦级数.

解 先将 $f(x)$ 在$(-2,0)$作偶延拓,再以 4 为周期作周期延拓得 $F(x)$,则 $F(x)$ 满足收敛定理的条件是处处连续,在$[0,2]$上 $F(x)\equiv f(x)$.

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 (x-1)\mathrm{d}x = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 (x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}\int_0^2 (x-1)\mathrm{d}\left(\sin\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\int_0^2 \sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x = \frac{4}{(n\pi)^2}\left[\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1] = \begin{cases} \dfrac{-8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases} (k = 1,2,\cdots).$$

故

$$f(x) = -\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}, x\in[0,2].$$

20.(1997. Ⅰ)设 $a_1=2, a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)(n=1,2,\cdots)$. 证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在; (2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

证 (1) 显然 $a_n > 0(n=1,2,\cdots)$,且

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant \sqrt{a_n\cdot\frac{1}{a_n}} = 1 \quad (n=1,2,\cdots).$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) - a_n = \frac{1-a_n^2}{2a_n} \leqslant 0.$$

故 a_n 是单调递减有下界的数列,从而必有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(2) 由(1)知 $0 \leqslant \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} \leqslant a_n - a_{n+1}$,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 为正

项级数．又若 S_n 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 的部分和，则

$$S_n=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n+1})=a_1-a_{n+1},$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛．由比较审敛法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛．

21.（1999.Ⅰ）设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$，(1)求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的和；(2) 试证：对任意常数 $\lambda>0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛．

(1) **解**　由于 $a_n+a_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\sec^2 x\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{n+1}[\tan^{n+1}x]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=1.$

(2) **证**　因 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，且 $a_n+a_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}$，有

$$\frac{a_n}{n^\lambda}<\frac{a_n+a_{n+2}}{n^\lambda}=\frac{1}{n^\lambda(n+1)}<\frac{1}{n^{1+\lambda}},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+\lambda}}$ 收敛，故由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛．

22.（1998.Ⅰ）设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，试问 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛？并说明理由．

解　级数收敛．

由于 $a_n>0(n=1,2\cdots)$ 并且单调减少，故必有极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且 $a\geqslant0$. 若 $a=0$，则由莱布尼茨定理知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛，与条件矛盾，故 $a>0$.

因为 $a_n\geqslant a>0$，故

$$\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n\leqslant\left(\frac{1}{a+1}\right)^n.$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a+1}\right)^n$ 收敛，故由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a_n+1}\right)^n$ 收敛．

23. (2001, Ⅰ)设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

解　因为

$$\arctan x=\int_0^x(\arctan x)'\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n x^{2n}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},x\in[-1,1],$$

所以
$$\frac{\arctan x}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n},x\in[-1,0)\cup(0,1],$$

于是

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2n+1}+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right]x^{2n}$$

$$=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n},x\in[-1,0)\cup(0,1].$$

由于当 $x=0$ 时上式右端取值为 1,而由题设,$f(0)=1$,故

$$f(x)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n},x\in[-1,1].$$

令 $x=1$,得
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{1}{2}[f(1)-1]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

24. (2003. Ⅲ)求幂级数 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2n}(|x|<1)$ 的和函数 $f(x)$ 及其极值.

解
$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}(|x|<1),$$

则 $f(0)=1$,且

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n-1}=-\frac{x}{1+x^2}.$$

上式两端从 0 到 x 积分,得

$$f(x)-f(0)=-\int_0^x\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2),$$

即 $$f(x)=1-\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

令 $f'(x)=0$，得唯一驻点 $x=0$. 由于 $f''(x)=\dfrac{x^2-1}{(1+x^2)^2}$，$f''(0)<0$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 取得极大值 $f(0)=1$.

25.（2005. Ⅰ）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[1+\dfrac{1}{n(2n-1)}\right]x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

解　令 $t=x^2$，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[1+\dfrac{1}{n(2n-1)}\right]t^n$ 的收敛半径

$$R'=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n(2n-1)}}{1+\dfrac{1}{(n+1)(2n+1)}}=1,$$

故原级数的收敛半径 $R=\sqrt{R'}=1$，从而收敛区间为 $(-1,1)$.

容易得出 $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}=-\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^n=\frac{x^2}{1+x^2},x\in(-1,1).$$

记 $$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n-1)}x^{2n},\text{则 }\varphi(0)=0,\text{且}$$

$$\varphi'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{2n-1}x^{2n-1},\text{且 }\varphi'(0)=0,$$

$$\varphi''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2x^{2n-2}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{2}{1+x^2},x\in(-1,1).$$

于是对 $x\in(-1,1)$，从 0 到 x 作积分得

$$\varphi'(x)=\int_0^x\varphi''(x)\mathrm{d}x=2\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=2\arctan x,$$

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\int_0^x\varphi'(x)\mathrm{d}x=2\int_0^x\arctan x\mathrm{d}x\\&=2\left(x\arctan x-\int_0^x\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)\\&=2x\arctan x-\ln(1+x^2).\end{aligned}$$

因此

$$f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}+2x\arctan x-\ln(1+x^2),x\in(-1,1).$$

三、

同济大学高等数学试卷选编

(一) 高等数学(下)期中考试试卷(Ⅰ)

试　题

一、填空、选择题

1. 如果函数 $f(x,y)$满足如下条件中的________，则该函数在点(x_0,y_0)处连续.

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)=f(x_0,y_0)$ 且 $\lim\limits_{y\to y_0}f(x_0,y)=f(x_0,y_0)$.

(B) $f(x,y)$在(x_0,y_0)处沿 l 方向有 $\dfrac{\partial f}{\partial l}$.

(C) $f(x,y)$有偏导数 $f_x(x_0,y_0)$，$f_y(x_0,y_0)$.

(D) $f(x,y)$在(x_0,y_0)处可微分.

2. 设函数 $f(x,y,z)$可微分且 $f_x(0,0,0)=1,f_y(0,0,0)=2,f_z(0,0,0)=3$. 如果 $u=f(x,\sin x,\tan x)$，则$\left.\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$________.

3. 如果函数 $f(x,y)=x^y$ 在点$(1,1)$处沿某方向 $\boldsymbol{l}$ 取得最大增长率，则$\boldsymbol{l}=$________.

4. 设曲面 Σ 由曲线 $\begin{cases}3x^2-y^2=1,\\ z=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转而成，则 Σ 在点$(1,1,1)$处的单位法向量为________.

5. 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3,\\ x+y+z=1\end{cases}$ 在点$(1,1,-1)$处的切线的对称式方程是________.

6. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，若交换积分次序，则 $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{x^2-2x}^{\sqrt{2x}}f(x,y)\mathrm{d}y=$________.

二、设 $f(x-y,\ln x)=\left(1-\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{\mathrm{e}^{x-y}}{x\ln x}$，写出 $f(x,y)$ 的表达式并求$\dfrac{\partial f}{\partial x}$与$\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

三、设二元函数 f 有连续的偏导数，又函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2=f(xy,z)$确定，求全微分 $\mathrm{d}z$.

四、设 $\begin{cases}x+y=u+v,\\x\sin v=y\sin u,\end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

五、在八分之一球面 $x^2+y^2+z^2=5r^2(x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0)$上求一点，使得函数 $f(x,y,z)=xyz^3$ 达到最大，并写出该最大值.

六、设 $f(x,y)=\begin{cases}x^2+y^2, & |y|>|x|,\\ xy, & 其他,\end{cases}$ 计算二重积分 $I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D:x^2+y^2\leqslant1$.

七、设 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 与球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2az$ 的交集，它的密度为 $\mu(x,y,z)=z$(单位省略). 求 Ω 的质量 M.

八、设曲线 Γ 的方程为 $x=t,y=-t^2,z=t^3$.

(1) 写出 Γ 的所有与平面 $3y+2z=6$ 平行的切线方程；

(2) 这些切线之间的距离是多少？

参考答案

一、1. 由于可微必连续．故选(D).

2. $\left.\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=[f_x(x,\sin x,\tan x)+\cos x\, f_y(x,\sin x,\tan x)+\sec^2 x\, f_z(x,\sin x,\tan x)]_{x=0}=6$.

3. $\boldsymbol{l}=\mathbf{grad}\, f(1,1)=(f_x(1,1),f_y(1,1))=(1,0)$.

4. 曲面 Σ 的方程为 $3x^2-y^2-z^2=1$，因此所求法向量为 $\pm(6x,-2y,-2z)|_{(1,1,1)}=\pm(6,-2,-2)$，其单位法向量为 $\pm\left(\dfrac{3}{\sqrt{11}},-\dfrac{1}{\sqrt{11}},-\dfrac{1}{\sqrt{11}}\right)$.

5. 对 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3,\\x+y+z=1\end{cases}$ 两端求微分，并代入点的坐标，得

$$\begin{cases}\mathrm{d}x+\mathrm{d}y-\mathrm{d}z=0,\\\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=0,\end{cases}$$

故 $\mathrm{d}x:\mathrm{d}y:\mathrm{d}z=1:-1:0$，因此切线的方向向量为$(1,-1,0)$，所求切线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{0}.$$

6. $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{x^2-2x}^{\sqrt{2x}}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{y+1}}^{1+\sqrt{y+1}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2}}^2 f(x,y)\mathrm{d}x$.

二、记 $x-y=u,\ln x=v$，则 $x=\mathrm{e}^v,y=\mathrm{e}^v-u$，代入右端，得

$$f(u,v)=\frac{u}{v}e^{u-2v},$$

即

$$f(x,y)=\frac{x}{y}e^{x-2y}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1+x}{y}e^{x-2y},\ \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{x(1+2y)}{y^2}e^{x-2y}.$$

三、对 $x^2+y^2+z^2=f(xy,z)$ 两端求微分，得

$$2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z=f_1'(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)+f_2'\mathrm{d}z,$$

即得

$$\mathrm{d}z=\frac{(yf_1'-2x)\mathrm{d}x+(xf_1'-2y)\mathrm{d}y}{2z-f_2'}\ (2z-f_2'\neq 0).$$

四、方程两端对 x 求偏导，得

$$\begin{cases}1=u_x+v_x,\\ \sin v+x(\cos v)v_x=y(\cos u)u_x,\end{cases}$$

解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x\cos v+\sin v}{x\cos v+y\cos u},\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y\cos u-\sin v}{x\cos v+y\cos u}.$$

五、设 $F(x,y,z)=xyz^3+\lambda(x^2+y^2+z^2-5r^2)$，令

$$\begin{aligned}F_x&=yz^3+2\lambda x=0,\\ F_y&=xz^3+2\lambda y=0,\\ F_z&=3xyz^2+2\lambda z=0,\\ x^2&+y^2+z^2=5r^2,\end{aligned}$$

解得 $x=y=r,z=\sqrt{3}r$. 即在 $(r,r,\sqrt{3}r)$ 点处，函数达到最大，其最大值为

$$\max f=f(r,r,\sqrt{3}r)=3\sqrt{3}r^5.$$

六、两直线 $|y|=|x|$ 将 D 划分为有 y 轴穿过的上下四分之一圆盘记为 D_1 与 D_2，有 x 轴穿过的左右四分之一圆盘记为 D_3 与 D_4，则

$$I=\iint\limits_{D_1+D_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_3+D_4}xy\mathrm{d}\sigma.$$

由对称性，$\iint\limits_{D_3+D_4}xy\mathrm{d}\sigma=0$，故

$$I=\iint\limits_{D_1+D_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{4}.$$

七、Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $D:x^2+y^2\leqslant\frac{3}{4}a^2$. 因此

$$M=\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}V=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}z\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{D}[2a\sqrt{a^2-x^2-y^2}-a^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}[2a\sqrt{a^2-\rho^2}-a^2]\rho\mathrm{d}\rho=\frac{5}{24}\pi a^4.$$

八、(1) $\boldsymbol{\tau}=(1,-2t,3t^2)$，$\boldsymbol{n}=(0,3,2)$.

令 $\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}=0$，得 $t_1=0,t_2=1$，即

$$\boldsymbol{\tau}_1=(1,0,0),\boldsymbol{\tau}_2=(1,-2,3).$$

所求切线方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}\text{ 与 }\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}.$$

(2) 取 $M_1(0,0,0)$，$M_2=(1,-1,1)$，$\overrightarrow{M_1M_2}=(1,-1,1)$. 所求距离为

$$d=\frac{|(\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_2)\cdot\overrightarrow{M_2M_1}|}{|\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_2|}=\frac{1}{\sqrt{13}}.$$

(二) 高等数学(下)期中考试试卷(II)

试　　题

一、填空、选择题

1. 函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$ 在点(1,2)处的全微分是________.

2. 曲面 $\dfrac{x^2+y^2}{2}-z^2=1$ 在点 $M(1,1,0)$处的切平面方程是________.

3. 设 $f(x,y)=e^{xy}+x\ln y$，则 $\mathbf{grad}\, f(1,2)=$________.

4. 设 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上连续，则由积分中值定理，在 D 上至少存在一点(ξ,η)，使________.

5. 将二次积分 $I=\int_0^1 dy\int_{y-1}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$ 交换积分次序，得 $I=$________.

6. 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$，则$\iint\limits_D\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}\right)dxdy=$________.

7. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点(0,0)处(　　).

(A) 连续、偏导数存在.　　　(B) 连续、偏导数不存在.

(C) 不连续、偏导数存在.　　(D) 不连续、偏导数不存在.

8. 根据判定极值的充分条件，函数 $f(x,y)=2x^2-xy+3y^2+5$ 在点(0,0)处(　　).

(A) 取得极大值.　　　(B) 取得极小值.

(C) 不取得极值.　　　(D) 不能判定是否取得极值.

9. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，则 $F'(2)=$________.

(A) $f(2)$.　　(B) $2f(2)$.　　(C) $-f(2)$.　　(D) 0.

二、设 $z=x^3 f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$，$f$ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

三、设有螺旋线 $x=2\cos t, y=2\sin t, z=\frac{4}{\pi}t$.

(1) 求出螺旋线上点 $M(\sqrt{2},\sqrt{2},1)$ 处的指向朝下的单位切向量 e_τ；

(2) 求出螺旋线上点 M 处的切线方程；

(3) 求函数 $u=x+2y+3z$ 在点 M 处沿方向 e_τ 的方向导数.

四、设闭曲面 Σ 的方程为 $F(x,y,z)=0$，其中 $F(x,y,z)$ 具有一阶连续偏导数且三个偏导数不同时为零. 点 $P(x_1,y_1,z_1)$ 为 Σ 外一点. 若点 $Q(x_2,y_2,z_2)$ 为 Σ 上离开点 P 最近的一点，试用拉格朗日乘子法证明：直线 PQ 为曲面 Σ 在点 Q 处的法线.

五、计算二重积分 $\iint\limits_D (x^2y^3+e^{x^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为由直线 $y=x, y=-x$ 和 $x=1$ 所围成的闭区域.

六、计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 为由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$z=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=1$ 所围成的闭区域.

七、求过点 $M(-1,0,4)$ 且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$，又与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交的直线的方程.

参考答案

一、1. $\mathrm{d}z\big|_{(1,2)}=\left[\frac{2x}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{2y}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}y\right]\Bigg|_{(1,2)}=\frac{1}{3}\mathrm{d}x+\frac{2}{3}\mathrm{d}y.$

2. 法向量为 $(x,y,-2z)\big|_{(1,1,0)}=(1,1,0)$，因此所求切平面方程为

$$x+y-2=0.$$

3. $\mathbf{grad}\, f(1,2)=(f_x(1,2),f_y(1,2))=\left(2e^2+\ln 2, e^2+\frac{1}{2}\right).$

4. $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)\sigma$，其中 σ 为区域 D 的面积.

5. $I=\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_0^{x+1}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y.$

6. 因为 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，所以

$$\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{5}{12}\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{5}{12}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{5}{24}\pi R^4.$$

7. 因为 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{k}{1+k^2}$，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在. 又

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0,$$

故选(C).

8. 因为

$$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0,f_{xx}(0,0)=4,f_{xy}(0,0)=-1,f_{yy}(0,0)=6,$$

$$f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)-f_{xy}^2(0,0)=25>0,$$

故选(B).

9. 当 $t>1$ 时,

$$F(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x=\int_1^t\mathrm{d}x\int_1^x f(x)\mathrm{d}y=\int_1^t(x-1)f(x)\mathrm{d}x,$$

因此 $F'(2)=(t-1)f(t)\big|_{t=2}=f(2)$. 故选(A).

二、$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3(xf_1'+\dfrac{1}{x}f_2')$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^4\left(xf_{11}''+\frac{1}{x}f_{12}''\right)+x^2\left(xf_{21}''+\frac{1}{x}f_{22}''\right)=x^5f_{11}''+2x^3f_{12}''+xf_{22}''.$$

三、(1) 曲线在其上任意点处的切向量为 $\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)=(-2\sin t,2\cos t,\dfrac{4}{\pi})$, 因此曲线在 M 点指向朝下的切向量为

$$\boldsymbol{\tau}=-\left(-2\sin t,2\cos t,\frac{4}{\pi}\right)\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left(\sqrt{2},-\sqrt{2},-\frac{4}{\pi}\right),$$

其单位向量为 $\boldsymbol{e}_\tau=\dfrac{\pi}{2\sqrt{\pi^2+4}}(\sqrt{2},-\sqrt{2},-\dfrac{4}{\pi})$.

(2) 螺旋线上点 M 处的切线方程为

$$\frac{x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{y-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=\frac{z-1}{-\frac{4}{\pi}}.$$

(3) $\nabla\boldsymbol{u}\big|_M=(1,2,3)$,

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}\bigg|_M=\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_\tau=-\frac{\pi}{2\sqrt{\pi^2+4}}\left(\sqrt{2}+\frac{12}{\pi}\right).$$

四、任意一点 (x,y,z) 到 P 的距离平方为 $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2$, 因此 Σ 上离开点 P 最近的一点, 相当于 $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2$ 在条件 $F(x,y,z)=0$ 下的条件极小值, 为此令

$$L=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2+\lambda F(x,y,z),$$

该函数的驻点满足

$$\begin{cases}2(x-x_1)+\lambda F_x=0,\\2(y-y_1)+\lambda F_y=0,\\2(z-z_1)+\lambda F_z=0,\\F(x,y,z)=0.\end{cases}$$

由条件知$Q(x_2,y_2,z_2)$必是该方程组的解，代入$x=x_2,y=y_2,z=z_2$后消去λ，得

$$\frac{x_2-x_1}{F_x(x_2,y_2,z_2)}=\frac{y_2-y_1}{F_y(x_2,y_2,z_2)}=\frac{z_2-z_1}{F_z(x_2,y_2,z_2)},$$

即

$$\overrightarrow{PQ}//\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)|_Q$$

因此，直线PQ是曲面的法线.

五、由于函数x^2y^3是y的奇函数，积分区域关于x轴对称，因此

$$\iint_D x^2y^3\mathrm{d}\sigma=0,$$

故

$$\iint_D(x^2y^3+\mathrm{e}^{x^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-x}^{x}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y=2\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{e}-1.$$

六、$$I=\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{z^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4z^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_z^{2z}\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{15}{2}\pi\int_0^1 z^4\mathrm{d}z=\frac{3}{2}\pi.$$

七、**解法一** 过点M且平行已知平面的平面方程为

$$3(x+1)-4y+z-4=0;$$

取已知直线上一点$N(-1,3,0)$，则

$$\overrightarrow{MN}=(0,3,-4),\boldsymbol{n}_2=\overrightarrow{MN}\times\boldsymbol{s}=(10,-4,-3),$$

因此，过M与已知直线的平面方程为

$$10(x+1)-4y-3(z-4)=0.$$

故，所求直线的方程为

$$\begin{cases}3x-4y+z-1=0,\\10x-4y-3z+22=0.\end{cases}$$

解法二 取已知直线上一点$N(t-1,t+3,2t)$，则

$$\overrightarrow{MN}=(t,t+3,2t-4),$$

令$\overrightarrow{MN}\perp\boldsymbol{n}=(3,-4,1)$，得$t=16$，故

$$\boldsymbol{s}=\overrightarrow{MN}=(16,19,28),$$

所求直线为

$$\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}.$$

(三) 高等数学(下)期末考试试卷(Ⅰ)

试　　题

一、填空、选择题

1. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点(0,0)处_______.

(A) 有二重极限但不连续.　　(B) 不连续但可偏导.

(C) 连续但不可偏导.　　(D) 连续且可偏导.

2. 三元函数 $u=\sin(xy)+\cos(yz)$ 在点 $\left(1,\dfrac{\pi}{4},1\right)$ 处的全微分 $\mathrm{d}u=$

_______.

3. 曲线 $\begin{cases}z=x^2+2y^2,\\ x+2y+z=6\end{cases}$ 在点(1,1,3)处的一个单位切向量为_______.

4. 设平面区域 D：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1(a>0,b>0)$，则 $\iint\limits_D (x+y)^5\mathrm{d}\sigma=$ _______.

5. 设曲线 L 是三角形 ABC 区域的正向边界，其中 A、B、C 的坐标分别为 $(-1,0)$、$(1,0)$、$(0,1)$，则 $\oint_L 2y\cos^2 x\mathrm{d}x+(\sin x\cos x-x)\mathrm{d}y=$ _______.

6. 设 $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}(n=1,2,\cdots)$，则以下级数中收敛的是_______.

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}$.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}+a_n)$.

二、1. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $f(x+y,xz)=0$ 确定，且 $x=1,y=0$ 对应于 $z=1$，其中 $f(u,v)$ 具有连续的偏导数，且 $f_u(1,1)=f_v(1,1)\neq 0$，求 $\mathbf{grad}z(1,0)$.

2. 设一个直椭圆锥体的锥面方程为 $(z-1)^2=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}(0\leqslant z\leqslant 1,a>0,$

$b>0$)，若将该直椭圆锥体切削成长方体（长方体的长、宽、高平行于坐标轴，如图1所示)，试用拉格朗日乘数法求所能获得的长方体的最大体积.

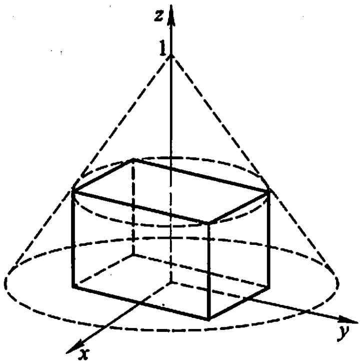


图 1

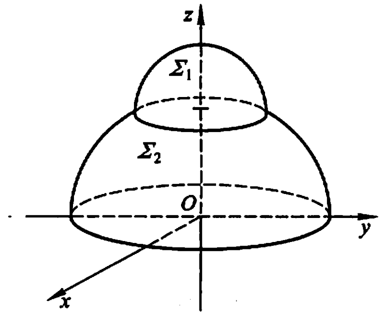


图 2

三、1. 图 2 所示的是某一建筑物的屋顶，它由曲面 Σ_1 与 Σ_2 拼接而成．Σ_1 是半径为 1 的半球面，Σ_2 是半径为 2 的半球面的一部分，试问该屋顶的面积是多少?

2. 设立体 Ω 由旋转抛物面 $\Sigma: z=x^2+y^2$ 与 Σ 在点 (a,b,a^2+b^2) $(a>0, b>0)$ 处的切平面以及圆柱面 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ $(r>0)$ 所围成，证明 Ω 的体积 V 仅与圆柱面的半径 r 相关，而与点 (a,b) 的位置无关.

四、1. 求线密度为常数 μ 的摆线 $L:\begin{cases} x=a(t+\sin t), \\ y=a(1+\cos t) \end{cases}$ $(t\in[0,2\pi], a>0)$ 关于 x 轴的转动惯量(单位从略).

2. 设定向曲面 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\leqslant z\leqslant 2)$ 的下侧，求积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

五、1. 判别以下命题的真假：(在真命题后的括弧内填入“√”，否则填入“×”)

(1) 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，那么部分和 S_n 有界. [ ]

(2) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. [ ]

(3) 设 $f(x)=1-\cos x$，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛． [ ]

(4) 设 $a_n>0$，如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\rho<1$. [ ]

(5) 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛区间是 $(-R,R)$，那么 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{3n+l}$ (l 是某自然数) 的

收敛区间是$(-\sqrt[3]{R},\sqrt[3]{R})$. [　　]

(6) 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径是R,那么$\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$ 的收敛半径也是R. [　　]

2. 把$[0,\pi]$上的函数 $f(x)=\begin{cases}k_1, 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2},\\ k_2, \dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$（常数$k_1,k_2$非零且$k_1\neq k_2$）展开成余弦级数,并指出展开式成立的范围.

六、在平面 $x+y+z=1$ 上求一直线,使它与直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$ 垂直相交.

参 考 答 案

一、1. 因为 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx^2}}f(x,y)=\dfrac{k}{1+k^2}$,即$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在,$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$,故选(B).

2. $\mathrm{d}u=\cos(xy)(x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x)-\sin(yz)(y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}y)\big|_{(1,\frac{\pi}{4},1)}$

$$=\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\mathrm{d}x-\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\mathrm{d}z.$$

3. 对 $\begin{cases}z=x^2+2y^2,\\ x+2y+z=6\end{cases}$ 两端求微分,并代入点的坐标,得

$$\begin{cases}\mathrm{d}z=2\mathrm{d}x+4\mathrm{d}y,\\ \mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=0,\end{cases}$$

解得 $\mathrm{d}z=0,\mathrm{d}x=-2\mathrm{d}y$,由此得到一个切向量为

$$(-2,1,0),$$

因此所求单位切向量为$\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)$.

4. 由于被积函数展开后的每一项或者是x的奇函数或者是y的奇函数,而积分区域关于x轴和y轴都对称,因此$\iint\limits_D(x+y)^5\mathrm{d}\sigma=0$.

5. 由格林公式,得$\oint\limits_L 2y\cos^2x\mathrm{d}x+(\sin x\cos x-x)\mathrm{d}y=\iint\limits_D-2\mathrm{d}\sigma=-2$.

6. 因为交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$ 均收敛,而两个收敛级数的和仍收敛,因此

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}+a_n)$ 收敛，故选(D).

二、1. $\mathrm{d}f(x+y,xz)\big|_{(1,0,1)}=f_u(1,1)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+f_v(1,1)(\mathrm{d}z+\mathrm{d}x)$，

方程 $f(x+y,xz)=0$ 两端微分，并把点的坐标代入，得

$$\mathrm{d}z=-2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y,$$

即 $z_x(1,0)=-2, z_y(1,0)=-1$，因此 $\mathbf{grad}z(1,0)=(-2,-1)$.

2. 设长方体在第 1 卦限内的顶点为 (x,y,z)，则体积为

$$V=4xyz.$$

令

$$L=xyz+\lambda\left[(z-1)^2-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right],$$

求偏导，得

$$L_x=yz-\frac{2\lambda x}{a^2}=0,$$

$$L_y=xz-\frac{2\lambda y}{b^2}=0,$$

$$L_z=xy+2\lambda(z-1)=0,$$

由此得到 $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=-z(z-1)$，结合条件 $(z-1)^2-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ 解得驻点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}a,\frac{\sqrt{2}}{3}b,\frac{1}{3}\right)$. 所能获得的长方体的最大体积为 $4\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}b\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{27}ab$.

三、1. Σ_2 所在半球面含在 Σ_1 所在球面中部分面积为

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{2\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}\mathrm{d}\rho=4\pi(2-\sqrt{3}).$$

因此，屋顶的面积 $=\frac{1}{2}(4\pi\cdot 2^2)-4\pi(2-\sqrt{3})+\frac{1}{2}\cdot 4\pi=2\pi(1+2\sqrt{3})$.

2. Σ 在点 $(a,b,a^2+b^2)(a>0,b>0)$ 处的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2a,2b,-1)$，故切平面方程为

$$2ax+2by-z-a^2-b^2=0, \text{即 } z=2ax+2by-a^2-b^2.$$

Ω 的体积

$$V=\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant r^2}(x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant r^2}[(x-a)^2+(y-b)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^r\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$
$$=\frac{\pi r^4}{2},$$

可见 V 与 r 有关，而与点 (a,b) 的位置无关.

四、1. $I_x=\int_L y^2\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}a^2(1+\cos t)^2\sqrt{a^2(1+\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{2\pi}8a^3\cos^4\frac{t}{2}\left|\cos\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t\xlongequal{t=2u}\int_0^{\pi}16a^3\cos^4 u|\cos u|\mathrm{d}u$$
$$=32a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 u\mathrm{d}u=\frac{256}{15}a^3.$$

2. $I=\iint_\Sigma[-z_x(x-y)-z_y(y-z)+(z-x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iint_{D_{xy}}\left[-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(x-y)-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(y-\sqrt{x^2+y^2})+(\sqrt{x^2+y^2}-x)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{D_{xy}}\left[-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

五、1. (1) 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，即数列 s_n 收敛，由此 S_n 有界，故选 $\surd$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 是级数收敛的必要条件而非充分条件，例如发散级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，故选 $\times$.

(3) 因为 $\left|(-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=1-\cos\frac{1}{n}\sim\frac{1}{2n^2}(n\to\infty)$，故选 $\surd$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho<1$ 是正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充分条件而非必要条件，例如收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$，故选 $\times$.

(5) 令 $y=x^3$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^{3n+l}=x^l\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n y^n$. 对于级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n y^n$，由条件得，$|y|<R$ 时绝对收敛，$|y|>R$ 时发散，即得级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^{3n+l}$，在 $|x|<\sqrt[3]{R}$ 时绝对收敛，$|x|>\sqrt[3]{R}$ 时发散，故选 $\surd$.

(6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}=\left(\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n x^n\right)''$，由幂级数逐项求导后收敛半径不变，

故选√.

2. $f(x)$ 偶延拓和周期延拓后，只在 $x=\dfrac{2k+1}{2}\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$ 处间断，而 $a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}k_1\mathrm{d}x+\dfrac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}k_2\mathrm{d}x=k_1+k_2$,

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}k_1\cos nx\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}k_2\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{2(k_1-k_2)}{n\pi}\sin\frac{n}{2}\pi,\end{aligned}$$

因此

$$f(x)=\frac{k_1+k_2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}(k_1-k_2)}{(2n-1)\pi}\cos(2n-1)x\quad\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]\right).$$

六、已知直线的参数方程为

$$x=1+t,y=t,z=-2-t,$$

代人平面求得 $t=2$，已知直线与平面的交点为$(3,2,-4)$. 所求直线的方向向量为

$$(1,1,1)\times(1,1,-1)=-2(1,-1,0),$$

因此所求直线为

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+4}{0}.$$

(四) 高等数学(下)期末考试试卷(Ⅱ)

试　　题

一、简答题(要求:简洁、明确)

1. 写出 $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$ 的定义域,并求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$.

2. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y-z=e^z$ 所确定,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

3. 函数 $z=x^2+y^2-xy$ 在点 $(-1,1)$ 处沿什么方向的方向导数最大?最大方向导数的值为多少?

4. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{6}}dy\int_y^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{\cos x}{x}dx$.

5. 求 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+xz)dS$, 其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=2$ 被平面 $z=0$ 和 $z=4$ 所割下的部分.

二、记曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $(-1,0,1)$ 处的切平面为 Π,立体 Ω 由曲面 $z=-(1+x^2+y^2)$ 及平面 Π 所围成,求 Ω 的体积.

三、计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^3+y^2)dydz+(y^3+z^2)dzdx+(z^3+x^2)dxdy$, 其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

四、设质点在平面力场 $\boldsymbol{F}=xy^2\boldsymbol{i}+x^2y\boldsymbol{j}$ 的作用下从原点 O 沿光滑曲线 L 移动到椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上位于第一象限内的点 $M(x_0,y_0)$ 处.

(1) 试将 $\boldsymbol{F}$ 所作的功 W 表达为曲线积分,并证明 W 与路径无关;

(2) 当 x_0,y_0 分别取何值时,$\boldsymbol{F}$ 所作的功最大? 求出此最大值(单位从略).

五、把函数 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成余弦级数.

六、设 $a_0=\dfrac{\pi}{4}, a_n=\iint\limits_{D}\dfrac{n\arctan^{n-1}y}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy\quad(n=1,2,3,\cdots)$,

其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant x,0\leqslant x\leqslant 1\}$.

(1) 求出 a_n;

(2) 求出幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域及和函数.

七、1. 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上的点 M,使该点处的切平面 Π 过已知直线 $L:\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$.

2. 设数列 u_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=1$.

(1) 证明:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(u_n+u_{n+1})$ 收敛并求出其和.

(2) 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(u_n+u_{n+1})$ 是条件收敛还是绝对收敛(须说明理由).

参考答案

一、1. $f(x,y)$ 的定义域为 $\{(x,y)\mid xy\geqslant -1,xy\neq 0\}$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{1+xy}+1}{1}=2.$$

2. 方程两端分别对 x,y 求偏导,得

$$1-z_x=e^z z_x,1-z_y=e^z z_y,$$

即

$$z_x=z_y=\frac{1}{1+e^z},$$

因此

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1+e^z}\right)=-\frac{1}{(1+e^z)^2}\cdot e^z z_x=-\frac{e^z}{(1+e^z)^3}.$$

3. $\mathbf{grad}z\big|_{(-1,1)}=(2x-y,2y-x)\big|_{(-1,1)}=(-3,3)$. 因此,函数沿 $(-1,1)$ 方向的方向导数最大,最大方向导数等于 $3\sqrt{2}$.

4. $\int_0^{\frac{\pi}{6}}dy\int_y^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{\cos x}{x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}dx\int_0^{x}\dfrac{\cos x}{x}dy=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos x dx=\dfrac{1}{2}$.

5. 由于 Σ 关于平面 $x=0$ 对称,有 $\iint\limits_{\Sigma}xz\,dS=0$,故

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+xz)dS=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=\iint\limits_{\Sigma}2dS=2S$$
$$=2\cdot 4\cdot 2\sqrt{2}\pi=16\sqrt{2}\pi.$$

二、法向量

$$\boldsymbol{n}=(z_x,z_y,-1)\big|_{(-1,0)}=(2x,2y,-1)\big|_{(-1,0)}=(-2,0,-1),$$

切平面 Π 的方程为

$$2x+z+1=0.$$

Ω 的体积

$$V=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2x}[-(1+x^2+y^2)+2x+1]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}(2\rho\cos\theta-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}.$$

三、$\Sigma_1: z=0(x^2+y^2\leqslant 1)$ 下侧，则

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^3+y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(x^3+y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$-\iint\limits_{\Sigma_1}(x^3+y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1,z\geqslant 0}(3x^2+3y^2+3z^2)\mathrm{d}V-\iint\limits_{\Sigma_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 3r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\cos^2\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{6\pi}{5}+\frac{\pi}{4}=\frac{29}{20}\pi.$$

四、$W=\int\limits_L xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y$，由于 $Q_x=2xy=P_y$，因此 W 与路径无关.

$$W=\int_{(0,0)}^{(x_0,y_0)}xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y=\left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_{(0,0)}^{(x_0,y_0)}=\frac{1}{2}x_0^2y_0^2,$$

当 $\frac{x_0^2}{9}=\frac{y_0^2}{4}=\frac{1}{2}$，即 $x_0=\frac{3}{2}\sqrt{2},y_0=\sqrt{2}$ 时 $\boldsymbol{F}$ 所作的功最大，其最大值等于 $\frac{9}{2}$.

五、$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{(\pi-x)\sin nx}{n}-\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}=\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi},$$

其余弦级数为

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^2\pi}\cos(2n-1)x\ (0\leqslant x\leqslant\pi).$$

六、$a_n=\int_0^1 dx\int_0^x \frac{n\arctan^{n-1}y}{(1+x^2)(1+y^2)}dy=\int_0^1 \frac{\arctan^n x}{1+x^2}dx=\frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{\pi}{4}, R=\frac{4}{\pi}$.

当 $x=\frac{4}{\pi}$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\pi}{4(n+1)}$ 发散；

当 $x=-\frac{4}{\pi}$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\pi(-1)^n}{4(n+1)}$ 收敛，

因此收敛域为 $\left[-\frac{4}{\pi},\frac{4}{\pi}\right)$，记和函数为 $s(x)$，则

$$[xs(x)]'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}x^n=\frac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{\pi x}{4}}=\frac{\pi}{4-\pi x},$$

故

$$xs(x)=\int_0^x\frac{\pi}{4-\pi x}dx=-\ln(4-\pi x)+\ln 4,$$

因此其和函数为

$$s(x)=\begin{cases}\dfrac{-\ln(4-\pi x)+\ln 4}{x}, & x\in[-\frac{4}{\pi},0)\cup(0,\frac{4}{\pi}),\\ \dfrac{\pi}{4}, & x=0.\end{cases}$$

七、1. 设 $M(x_0,y_0,z_0)$ 为所求的点，则椭球面在该点处的法向量为 $(2x_0, 4y_0, 6z_0)$，切平面 Π 的方程为

$$x_0x+2y_0y+3z_0z=21.$$

由条件，得 $(2x_0,4y_0,6z_0)\perp(2,1,-2)$ 即

$$(2x_0,4y_0,6z_0)\cdot(2,1,-2)=4x_0+4y_0-12z_0=0.$$

而直线 L 上的点 $(6,3,1)$ 必在切平面 Π 上，因此

$$6x_0+6y_0+3z_0=21,$$

而 $M(x_0,y_0,z_0)$ 在椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上，即

$$x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=21.$$

解得 $x_0=0,y_0=3,z_0=1$ 和 $x_0=4,y_0=-1,z_0=1$，即 M 点为

$$(0,3,1)\text{ 或 }(4,-1,1).$$

2. (1) 记级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(u_n+u_{n+1})$ 的前 n 项之和为 S_n，则

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(u_k+u_{k+1})=u_1+(-1)^{n+1}u_{n+1}.$$

由条件 $\lim\limits_{n\to\infty} n u_n = 1$，得 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = u_1$，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(u_n + u_{n+1})$ 收敛，其和为 u_1.

(2) 由条件 $\lim\limits_{n\to\infty} n u_n = 1$，得 n 足够大后 $u_n \geqslant 0$，且 $u_n \sim \dfrac{1}{n}(n\to\infty)$. 因此当 n 足够大后，

$$|(-1)^{n+1}(u_n + u_{n+1})| = u_n + u_{n+1} \sim \frac{2}{n}(n\to\infty),$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n+1}(u_n + u_{n+1})|$ 发散.

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(u_n + u_{n+1})$ 条件收敛.

郑重声明

College Mathematics Guidance Series
大学数学学习辅导丛书

□ 高等数学 第六版 上册	同济大学数学系
□ 高等数学 第六版 下册	同济大学数学系
□ 高等数学附册 学习辅导与习题选解 同济・第六版	同济大学数学系
□ 高等数学习题全解指南 上册 同济・第六版	同济大学数学系
■ 高等数学习题全解指南 下册 同济・第六版	同济大学数学系
□ 工程数学——线性代数 第五版	同济大学数学系
□ 线性代数附册 学习辅导与习题全解 同济・第五版	同济大学数学系
□ 工程数学——新编统计学	同济大学数学系
□ 工程数学——概率统计简明教程	同济大学应用数学系
□ 概率统计简明教程附册 学习辅导与习题全解	同济大学应用数学系

ISBN 978-7-04-020746-0
9 787040 207460 >
定价 21.40元